

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES
Faculté des Sciences
Département de Physique



Amélioration de la Mesure Quantique de la Phase Optique avec des Etats Comprimés

Matthieu Arnhem
Année académique 2014-2015

QuIC

Promoteur
Nicolas Cerf

Co-promoteur
Evgueni Karpov

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Sciences Physiques

Contents

Résumé	i
Abstract	iii
Remerciements	v
1 Introduction	1
2 Notions Fondamentales	5
2.1 Notions d'Optique	5
2.1.1 Optique Classique	5
2.1.2 Optique Quantique	6
2.1.3 Matrice Densité et Fonction de Wigner	7
2.1.4 Etats Gaussiens et Matrice de Covariance	9
2.1.5 Etats Cohérents	10
2.1.6 Quelques Propriétés des Etats Cohérents	13
2.1.7 Etats Comprimés	14
2.1.8 Diviseur de Faisceau	19
2.2 Paradoxe EPR et Etats de Bell	20
2.2.1 Paradoxe EPR	20
2.2.2 Inégalités de Bell	21
2.3 Problème de la Phase Quantique	22
2.3.1 Formalisme de Dirac	22
2.3.2 Formalisme de Susskind et Glogower	25
2.3.3 Formalisme de Pegg et Barnett	27
2.4 Statistique Circulaire	30
2.4.1 Pourquoi la Statistique Circulaire ?	31
2.4.2 Préliminaires et Notations	32
2.4.3 Mesure de la Localisation	32

3	Travaux Préliminaires	35
3.1	Mesures Individuelles et Mesure Globale	35
3.2	Spins Parallèles et Antiparallèles	37
3.3	Conjugaison de Phase de Variables Continues Quantiques . .	39
3.3.1	Conjugaison de phase et bruit	40
3.3.2	Transformation de conjugaison de phase optimale . . .	41
3.3.3	Optimisation de la mesure d'états cohérents	43
3.4	Supériorité des Mesures Globales	45
4	Amélioration de la Mesure de la Phase	47
4.1	Mesure de Deux Etats Comprimés et Conjugués	47
4.2	Amélioration de la Mesure des Quadratures	54
4.3	Corrélations et Détermination de la Phase	59
4.4	Erreur sur les Corrélations	62
4.4.1	Cas sans corrélations	65
4.4.2	Cas d'un angle intermédiaire	66
4.4.3	Cas symétrique de $\theta = \frac{\pi}{4}$	67
4.4.4	Comparaison des erreurs relatives	68
	Conclusions et Perspectives	73

Résumé

Le travail qui a été réalisé dans ce mémoire est centré sur la mesure quantique de la phase optique dans les systèmes quantiques à dimension infinie dits à *variables continues*. Ces systèmes décrivent des faisceaux laser à faible intensité où les propriétés quantiques de la lumière ne sont plus négligeables. En particulier, on améliore la précision de la mesure en utilisant des états non-classiques dits *comprimés* et en s'inspirant d'une technique déjà vérifiée pour des états quantiques cohérents. Explicitement, on montre que les corrélations entre les quadratures de ces états comprimés sont reliées à leur phase optique et que la technique utilisée permet d'améliorer la précision de la mesure de ces corrélations. La mesure de la phase optique est largement utilisée dans l'imagerie et la détection optique et donc améliorer sa précision est toujours un problème important.

Mots-clés : état comprimé, mesure quantique, mesure globale, corrélations.

Abstract

The work that has been realised in this memoir is centered on the quantum measurement of optical phase in infinite dimensionnal quantum systems so-called *with continuous variables*. These systems describe low intensity laser beams where quantum properties of light must be taken in consideration. In particular, we improve the measurement precision by using non-classical states called *squeezed states* and by adapting a technique already verified for coherent quantum states. Explicitly we show that the correlations between the quadratures of the squeezed states depend on the optical phase and the the technique we use enhances the precision of the measurement of these correlations. The optical phase measurement is widely used in imagery and optical detection and thus enhancing its precision is still an important problem.

Keywords: squeezed state, quantum measure, global measurement, correlations.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier M. E. Karpov pour m'avoir suivi et conseillé tout au long de cette recherche. Il a toujours été un co-promoteur disponible et à l'écoute. En plus de m'avoir introduit les notions d'optique quantique, il m'a montré comment utiliser les outils mathématiques, physiques et informatiques qui m'ont permis de mener au mieux mes recherches.

Je remercie M. N. Cerf, pour m'avoir exposé et guidé dans ce problème intéressant de la mesure en optique quantique et de m'avoir accueilli au sein du QuIC en me fournissant un lieu de travail.

Je remercie M. Brandeho, collègue de bureau, qui m'a guidé dans la vie de tous les jours au sein du QuIC et qui s'est montré un grand amateur de spécialités culinaires belges.

Je remercie A. Bowles, ami de longue date, qui a été un soutien moral dans les bons et surtout les moins bons moments de ma vie pendant la réalisation de ce mémoire.

Je remercie P. Mallien, mon parrain, qui me soutient dans mes études et pour sa relecture attentive des passages de mon mémoire écrits en anglais.

Finalement, je remercie J. Arnhem et J. Mallien, mes parents, sans qui je n'aurais jamais pu arriver jusqu'ici. Ils m'ont toujours soutenu dans tous mes choix et m'ont toujours mis dans les meilleures conditions pour réaliser mes projets.

Chapter 1

Introduction

Toute science expérimentale passe par l'observation de phénomènes et toute compréhension d'un phénomène passe par sa quantification, sa *mesure*. Si une science veut pouvoir comprendre un phénomène, elle va devoir le mesurer. La mesure est les lunettes qui nous éclairent sur les propriétés d'un phénomène ou d'une réalité et la juge qui confronte un modèle théorique à cette réalité. Elle est l'outil qui permet de *théoriser* la réalité physique en attribuant une quantité abstraite aux phénomènes physiques qui existent autour de nous. Il ne peut y avoir de connaissance de notre environnement et d'investigation scientifique sans mesures. C'est pourquoi, elle fait partie intégrante de la méthode scientifique, depuis l'observation d'un phénomène jusqu'à la réalisation d'une expérience qui confronte une théorie ainsi que ses prédictions à la réalité. Cependant, toute mesure est toujours entachée d'une erreur, d'une incertitude. En effet, elle n'est qu'une estimation, plus ou moins bonne, de la réalité à laquelle on s'intéresse. Améliorer une mesure, c'est-à-dire diminuer l'incertitude liée à celle-ci, nous permet de sonder les propriétés physiques d'un système à de nouvelles échelles (plus petites ou plus grandes).

La physique est passée maître dans l'art de la mesure. Depuis plusieurs siècles, elle utilise ses connaissances pour développer des instruments de mesure qui lui sont nécessaires ainsi que pour d'autres sciences telles que la chimie, la biologie, la médecine, etc. La précision des mesures est un élément important. Certains phénomènes qui étaient noyés dans la marge d'erreur de l'expérience peuvent émerger si on parvient à diminuer cette marge d'erreur. En effet, ces phénomènes ne se révèlent qu'à certaines échelles de temps ou d'espace qui peuvent être parfois extrêmement petites. Pour pouvoir étudier les phénomènes qui se produisent à ces échelles, on a besoin d'instruments de

mesures adaptés, généralement plus précis que ceux existant déjà. L'histoire montre que notre connaissance de la physique du monde augmente avec la précision avec laquelle on peut le mesurer.

Aujourd'hui, la physique sonde la matière à des échelles quantiques et a besoin pour cela d'instruments de mesure de très grande précision. La technologie actuelle pour étudier les propriétés quantiques de la matière se confronte à une incertitude d'origine quantique, intrinsèque à la nature. Cette limite quantique prend son origine dans le principe d'incertitude d'Heisenberg qui fixe une limite sur la mesure simultanée de certaines paires de variables d'un système physique, appelées variables conjuguées ou encore complémentaires, telles que, par exemple, la position et l'impulsion. Il est important de noter que cette incertitude quantique est fondamentalement inhérente à la nature ondulatoire de la matière à ces échelles et non à une incapacité technologique. On ne peut donc pas se défaire de cette incertitude quantique. Cependant, les chercheurs essaient de contourner les limites apparentes dues à l'incertitude en préparant intelligemment le système étudié et en développant une stratégie de mesure adaptée. C'est ce que nous ferons en utilisant des états quantiques dits comprimés (voir 2.1.7) et en s'inspirant d'idées sur l'amélioration et l'optimisation de la mesure quantique (voir 3).

Les propriétés des états comprimés en font des objets fort étudiés pour améliorer la mesure de certaines variables physiques. Ainsi plusieurs projets expérimentaux utilisent ces états quantiques pour des mesures de haute précision. Ces états comprimés sont par exemple utilisés dans l'expérience LIGO [1] qui tente de détecter des ondes gravitationnelles prédites par Einstein en 1916 [2][3]. La taille de leur expérience étant beaucoup plus petite que la taille supposée de ces ondes gravitationnelles, ils ont besoin de pouvoir mesurer le déphasage de la lumière dans leurs cavités optiques avec une très grande précision. Les états comprimés semblent donc être des états particulièrement adaptés pour cette tâche. Pouvoir améliorer la mesure de la phase de ces états comprimés est donc un problème d'actualité et d'un intérêt plus large que la seule curiosité scientifique. Elle peut permettre des améliorations pour des mesures de haute précision.

De plus, le formalisme dans lequel on développe ce mémoire est le formalisme habituel de la mécanique quantique. L'étude que l'on fait ici peut donc s'exporter dans d'autres domaines que celui de l'optique quantique pour autant qu'ils puissent créer des états quantiques comprimés et les manipuler. C'est par exemple le cas pour des condensats de Bose-Einstein qui sont un état de la matière pour lequel un grand nombre de particules occupent l'état de plus basse énergie. Ces particules doivent être des bosons afin de pouvoir occuper à plusieurs un état quantique spécifique. Le premier

condensat de Bose-Einstein à été réalisé expérimentalement en 1995 par E. Cornell et C. Wieman et leurs collaborateurs [4]. Ces états de la matière peuvent aussi être comprimés. L'étude de ces condensats de Bose-Einstein comprimés est également un domaine de recherche d'actualité comme en témoigne les articles [5] [6].

Nous allons donc, dans ce mémoire, améliorer la mesure quantique de la phase optique à l'aide d'états comprimés en utilisant une stratégie de mesure qui à déjà été confirmée par des résultats précédents, en particulier pour des états cohérents [38].

Chapter 2

Notions Fondamentales

2.1 Notions d'Optique

2.1.1 Optique Classique

L'optique est la branche de la physique qui traite des phénomènes liés à la lumière. La lumière est une *onde électromagnétique* composée de *champs électromagnétiques* qui sont les solutions des équations de Maxwell en l'absence de charges. Ces solutions peuvent être décomposées en modes propres qui ont chacun une fréquence spécifique qui leur est associée. On appelle *faisceau monochromatique*, un faisceau lumineux qui ne possède qu'un seul mode fréquentiel. Les équations de Maxwell sans charges s'écrivent :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} &= \epsilon\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},\end{aligned}\tag{2.1}$$

où ϵ et μ sont respectivement la *permittivité* et la *perméabilité* du milieu. Il existe manifestement un couplage entre l'expression du *champ électrique* \mathbf{E} et du *champ magnétique* \mathbf{B} , on peut donc concentrer notre étude uniquement sur le champ électrique \mathbf{E} . Les solutions de l'équation d'onde sont des ondes planes monochromatiques dont on peut écrire l'expression du champ électrique sous la forme :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \left[\mathbf{E}_0 e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right], \tag{2.2}$$

où ω est la fréquence angulaire du champ monochromatique et \mathbf{k} le vecteur d'onde. Si on considère un faisceau monochromatique, on peut écrire son

champ électrique sinusoïdal dans l'espace des phases comme une somme de deux nombres complexes dépendants du temps [8] :

$$E(t) = \frac{1}{2}(a(t) + a^*(t)), \quad (2.3)$$

où $a(t)$ et $a^*(t)$ sont appelés *phaseurs* et s'expriment comme $a(t) = ae^{i\omega t}$ avec a une amplitude complexe. On peut représenter cette amplitude complexe en termes des quadratures par $a = x + ip$ avec x et p réels. Le champ électrique s'écrit dans cette représentation comme :

$$E(t) = x \cos(\omega t) + p \sin(\omega t), \quad (2.4)$$

avec $x = (a+a^*)/2$ et $p = (a-a^*)/(2i)$. On appelle ces quantités *quadratures* parce qu'elles sont séparées de 90° en phase.

2.1.2 Optique Quantique

On peut également voir le champ électrique 2.3 d'un point de vue quantique. Il faut pour cela promouvoir les quantités $E(t)$, a et a^* au rang d'opérateurs dans un espace de Hilbert. Concrètement, cela se fait par la procédure de quantification canonique qui promeut les quantités $E(t)$, a et a^* en des opérateurs agissant sur les états du système et qui sont soumis à certaines règles de commutation explicitées ci-dessous. On écrit alors $\hat{E}(t)$, \hat{a} et \hat{a}^\dagger au lieu de $E(t)$, a et a^* pour signifier qu'il s'agit maintenant d'opérateurs. Dès lors, il existe également des opérateurs \hat{x} et \hat{p} ayant une définition similaire à celle des quadratures x et p . Ces opérateurs apparaissent lorsque l'on fait l'étude quantique de l'oscillateur harmonique. En effet, *le champ électromagnétique est formellement équivalent à un ensemble d'oscillateurs harmoniques indépendants* [10], c'est pourquoi il n'est pas étonnant de voir apparaître ces opérateurs dans l'expression quantique du champ électrique. On étudiera les propriétés de ces opérateurs plus en détails dans la section portant sur les états cohérents (2.1.5).

La quantification canonique du champ électrique impose les relations de commutations bosoniques sur les opérateurs \hat{a} et \hat{a}^\dagger qui sont :

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1. \quad (2.5)$$

On prend la convention $\hbar = 1$ et $\omega = 1$. Cependant ces opérateurs ne sont pas hermitiens et ne correspondent donc pas à des valeurs physiques. Ils

peuvent s'exprimer en termes des opérateurs hermitiens \hat{x} et \hat{p} qui correspondent aux observables physiques de position et d'impulsion respectivement. Les opérateurs de *position* \hat{x} et d'*impulsion* \hat{p} s'expriment en termes des opérateurs de *création* \hat{a}^\dagger et d'*annihilation* \hat{a} comme :

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}, \\ \hat{p} &= \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{i\sqrt{2}}.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Les vecteurs propres, de valeurs propres x et p respectivement, de ces opérateurs s'écrivent dans la notation de Dirac comme $|x\rangle$ pour l'opérateur \hat{x} et $|p\rangle$ pour l'opérateur \hat{p} . Ces vecteurs propres correspondent à des ondes planes en termes de fonctions d'ondes. Dès lors, la relation de commutation entre les opérateurs \hat{x} et \hat{p} n'est pas nulle et s'écrit :

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i.\tag{2.7}$$

C'est la relation de commutation *canonique*. Puisque \hat{x} et \hat{p} ne commutent pas entre-eux, on ne pourra pas spécifier ces deux quantités avec une précision infinie. Il existe une relation d'incertitude exprimée sous forme d'une inégalité appelée *inégalité d'Heisenberg* qui s'écrit :

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2},\tag{2.8}$$

où Δx et Δp sont les écarts-types des quadratures x et p du faisceau lumineux dans notre cas. On ne peut donc pas connaître *simultanément* la position x et l'impulsion p avec une précision infinie. Plus on déterminera la position x avec précision, plus l'erreur sur l'impulsion p sera grande et vice-versa. Le principe d'incertitude duquel est dérivé l'inégalité d'Heisenberg, est un principe qui limite fortement l'information que l'on peut tirer d'un système quantique. Cependant, on verra que la technique que nous allons utiliser va nous permettre de connaître les quadratures avec une précision plus grande que celle d'une mesure simultanée des quadratures d'un mode optique qui est limitée par l'inégalité d'Heisenberg. Cela ne sera pas gratuit, on verra qu'il faudra doubler la quantité d'information afin de pouvoir la connaître avec plus de précision.

2.1.3 Matrice Densité et Fonction de Wigner

En mécanique, un état physique peut être caractérisé en termes d'une *fonction d'onde* appartenant à l'espace des fonctions de carré sommables ou bien

en termes de vecteur-ket appartenant à l'espace des états du système qui est un sous-espace de l'espace de Hilbert [10]. Le vecteur-bra appartient lui à l'espace dual de cet espace des états du système. La notation usuelle pour les vecteurs-bra et -ket est la notation de Dirac ($\langle \cdot |$ et $|\cdot \rangle$). Si le système physique peut être décrit par un seul vecteur d'état $|\Psi\rangle$, on dira qu'il est dans un état *pur*. Il existe toujours une observable définie pour un tel état. Cependant, si le système physique se trouve dans un mélange statistique d'états, on dira qu'il se trouve dans un état *mixte* ou *mélangé*. Dans ce cas-ci, il n'existe que des probabilités d'observer le système dans tel ou tel état du mélange statistique d'états. On peut aussi décrire un système physique par un *opérateur densité* ρ qui est défini en termes des vecteurs -bra et -ket. L'opérateur densité peut s'exprimer dans une base de l'espace des états et prendre la forme d'une matrice, appelée *matrice densité*. Celle-ci permet de clairement rendre compte des termes d'interférences qui peuvent exister entre les différents états du système [10]. Voici quelques exemples de matrices densité de différents états:

- état pur : $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$,
- état mélangé : $\rho = P_1|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| + P_2|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|$ avec $P_1 + P_2 = 1$.

Une autre description complète des états quantiques peut être donnée en termes de la *fonction de Wigner* W définie par :

$$W(\bar{x}, \bar{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^N} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \exp\left(\frac{-i}{\hbar} \bar{p} \cdot \bar{y}\right) \left\langle \bar{x} + \frac{\bar{y}}{2} \left| \hat{\rho} \right| \bar{x} - \frac{\bar{y}}{2} \right\rangle = \frac{\rho_W(\bar{x}, \bar{p})}{(2\pi\hbar)^N}, \quad (2.9)$$

où $\bar{x} = (x_1, \dots, x_N)$ et $\bar{p} = (p_1, \dots, p_N)$ et où x_i et p_i sont les variables canoniques du mode i .

La moyenne statistique d'une observable \hat{A} s'exprime alors comme :

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{tr}(\hat{A}\hat{\rho}) = (2\pi)^n \int d\bar{x} d\bar{p} A_W(\bar{x}, \bar{p}) W(\bar{x}, \bar{p}). \quad (2.10)$$

Cette expression est analogue à l'expression classique :

$$\langle \hat{A} \rangle = \int d\bar{x} d\bar{p} A_{cl}(\bar{x}, \bar{p}) p(\bar{x}, \bar{p}),$$

où $p(\bar{x}, \bar{p})$ est la densité de probabilité classique.

La fonction de Wigner correspond à la densité de probabilité classique dans la limite $\hbar \rightarrow 0$.

De plus, l'intégrale de W sur les variables x_1, \dots, x_{n-1} et p_1, \dots, p_n ,

$$\int_{\mathbb{R}^{2n-1}} d^n p dx_1 \dots dx_{n-1} W(\bar{x}, \bar{p}),$$

donne la *probabilité* des résultats de détections homodynes sur la variable x_n . La fonction de Wigner est une *pseudo-densité de probabilité*, parce qu'elle prend, pour la plupart des systèmes, des valeurs négatives.

2.1.4 Etats Gaussiens et Matrice de Covariance

Un *état Gaussien* est, par définition, un état quantique ayant une fonction de Wigner Gaussienne. Les états cohérents, thermiques et comprimés ainsi que les impulsions laser sont des exemples d'états Gaussiens.

Le *centre* d'un état Gaussien est donné par $\langle \hat{x} \rangle_\rho$ et $\langle \hat{p} \rangle_\rho$ et les *variances* d'un état gaussien sont les paramètres de la *matrice de covariance*, définie par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2 & \frac{1}{2} \langle \hat{x} \hat{p} + \hat{p} \hat{x} \rangle - \langle \hat{x} \rangle \langle \hat{p} \rangle \\ \frac{1}{2} \langle \hat{x} \hat{p} + \hat{p} \hat{x} \rangle - \langle \hat{x} \rangle \langle \hat{p} \rangle & \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

De manière générale, c'est la matrice dont les éléments sont les suivants [9]:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \langle \{ \Delta \hat{x}_i, \Delta \hat{x}_j \} \rangle, \quad (2.12)$$

où $i = 1, 2$, $\Delta \hat{x}_i = \hat{x}_i - \langle \hat{x}_i \rangle$ et $\{ \cdot, \cdot \}$ est la relation d'anti-commutations. Dans nos notations, $\hat{x}_1 = \hat{x}$ et $\hat{x}_2 = \hat{p}$. S'il y a plusieurs modes, on peut étendre la matrice de covariance de telle sorte que les indices impairs correspondent à l'opérateur $\hat{x}_{\frac{i+1}{2}}$ et les indices pairs à l'opérateur $\hat{p}_{\frac{i}{2}}$.

Un état caractérisé par $\langle \hat{x} \rangle = \langle \hat{p} \rangle = 0$, comme l'état du vide par exemple, correspond à un déplacement nul (dans l'espace des phases) en termes du *vecteur déplacement* :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$$

Dès lors, on peut écrire l'*opérateur de déplacement* comme [12] :

$$\hat{D}(\alpha) = e^{i\mathbf{R}^\dagger \omega \alpha} \quad (2.13)$$

où $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. On a donc que $|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle$. On remarque que l'opérateur déplacement a pour effet de translater la valeur moyenne

de l'état du vide dans l'espace des phases tout en conservant la matrice de covariance.

Une propriété intéressante des états Gaussiens est que ses moments d'ordre strictement supérieurs à 2 sont fonctions des moments d'ordre 1 et 2. Dès lors, un état Gaussien ρ est complètement caractérisé par le vecteur déplacement \mathbf{R} et la matrice de covariance. Cependant, dans beaucoup de cas, si la symétrie du problème le permet, on peut arbitrairement ajuster les premiers moments par des opérations unitaires locales pour recentrer localement les états Gaussiens. On peut donc sans pertes de généralités prendre les premiers moments égaux à 0. En effet, ces transformations unitaires laissent invariantes les propriétés relevantes du point de vue de l'information telles que l'entropie et l'intrication [12].

La description complète d'un état Gaussien arbitraire est donc donnée par la matrice de covariance σ . De plus, la trace de σ donne l'énergie moyenne si on la multiplie par $\hbar\omega$ où ω est la fréquence du mode.

La *fonction de Wigner* (2.9) pour des *états Gaussiens* dont les valeurs moyennes des quadratures sont nulles, peut se réécrire de manière générale comme [7]:

$$W(X) = \frac{1}{(2\pi)^n \sqrt{\det[\sigma]}} e^{-\frac{1}{2}[\mathbf{X}^T \sigma^{-1} \mathbf{X}]}, \quad (2.14)$$

où $\mathbf{X} = (x_1, p_1, \dots, x_n, p_n)$ et n est le nombre de modes de l'état considéré. On remarque ici que la matrice de covariance σ contient toute l'information sur l'état Gaussien considéré.

2.1.5 Etats Cohérents

Les niveaux d'énergie dans l'oscillateur harmonique sont équidistants. On peut dès lors associer chaque niveau d'énergie à un nombre entier n . Le passage du niveau d'énergie n au niveau $n+1$ ou $n-1$ se fait par l'action de l'opérateur de création et de destruction respectivement. [10]

L'*opérateur de destruction* est défini en termes des opérateurs de quadratures par :

$$\hat{a} = \frac{\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2}} \quad (2.15)$$

et l'*opérateur de création* est défini par :

$$\hat{a}^\dagger = \frac{\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2}} \quad (2.16)$$

où \hat{x} est l'*opérateur de position* et \hat{p} est l'*opérateur d'impulsion*. Ce sont les quadratures du champ électromagnétique. Ces opérateurs sont hermi-

tiens et correspondent donc à des quantités observables. De plus, ils sont les équivalents quantiques des variables canoniques x et p de l'oscillateur harmonique classique. Les opérateurs (2.15) et (2.16) satisfont à la propriété suivante :

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (2.17)$$

On prend $\hbar = 1$. L'état du vide $|0\rangle$ est défini par :

$$\hat{a}|0\rangle = 0. \quad (2.18)$$

Il est aussi parfois appelé *état fondamental* car il correspond à l'état de plus basse énergie du système physique utilisé.

On définit les *états cohérents* comme étant les états propres de l'opérateur \hat{a} , on a donc que :

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (2.19)$$

et donc que

$$\langle\alpha^*|\hat{a}^\dagger = \langle\alpha^*|\alpha^*. \quad (2.20)$$

De plus, on peut construire un état cohérent à partir de l'état du vide comme suit :

$$|\alpha\rangle = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger)|0\rangle, \quad (2.21)$$

et

$$\langle\alpha^*| = \langle 0| \exp(\hat{a}\alpha^*). \quad (2.22)$$

On en déduit la propriété suivante :

$$\langle\beta^*|\alpha\rangle = \exp(\beta^*\alpha). \quad (2.23)$$

Cette équation nous dit que les états cohérents ne forment pas une base orthonormée (contrairement aux états à n particules).

La *relation de fermeture* en termes d'états cohérents s'écrit :

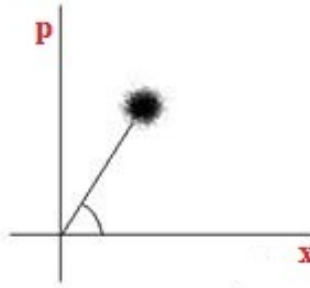
$$\mathbf{1} = \int \frac{d\alpha^* d\alpha}{2\pi i} e^{-\alpha^*\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha^*| \quad (2.24)$$

Les équations (2.21) et (2.22) peuvent être généralisées en utilisant l'*opérateur de déplacement de Weyl* \hat{D} défini par l'équation (2.13). Un état cohérent peut être construit en agissant avec l'opérateur de déplacement de Weyl sur l'état du vide :

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle \quad (2.25)$$

Ces états peuvent se représenter dans un espace des phases quantique (étant donné que $\hat{a} = \frac{\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = \frac{x + ip}{\sqrt{2}}$ pour des états cohérents). Il s'agit d'un espace des phases optique pour lequel chaque point correspond à un état unique d'un système optique. L'état cohérent en est un exemple et peut donc se représenter par un point dans cet espace. Cependant, puisque ses variables conjuguées x et p obéissent à une relation d'incertitude, il en découle qu'une mesure d'une paire de quadratures d'un état cohérent suit une distribution de probabilités. On représentera donc toujours un tel état par un point entouré d'un cercle ou d'une ellipse qui représentent la variance associée à la distribution de probabilités de l'état. L'opérateur déplacement de Weyl permet donc de déplacer ces états dans l'espace des phases quantique.

Figure 2.1: Etat cohérent dans l'espace des phases



Représentation d'un état cohérent dans l'espace des phases optique avec sa zone d'incertitude. Ses variances selon x et p sont égales.[13]

Les états cohérents sont des états dits quasi-classiques parce qu'ils sont les états quantiques qui possèdent un comportement très proche d'états classiques de la lumière. En effet, ils ressemblent à une oscillation classique de la lumière à ceci près qu'ils sont soumis à l'inégalité d'Heisenberg et présentent donc un bruit d'origine quantique. Les états cohérents sont souvent considérés comme étant une bonne image d'une *particule* car ils se propagent de manière cohérente ou physique c'est-à-dire qu'ils ne se transforment pas lors de leur propagation sauf s'ils sont soumis à une interaction. Ceci en fait des états quantiques importants en physique et ont valu le prix Nobel en 2005 à R. J. Glauber [11] qui les a introduits en optique en 1963.

2.1.6 Quelques Propriétés des Etats Cohérents

Pour des systèmes bosoniques, on peut définir un opérateur *nombre de particules* \hat{n} à partir des opérateurs de création et d'annihilation comme :

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (2.26)$$

Les états propres de cet opérateur sont notés $|n\rangle$. On peut définir ces *états à n particules* à partir des opérateurs de création (2.16) comme :

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (2.27)$$

Ils forment une base orthonormée de l'espace de Fock car $\langle m | n \rangle = \delta_{mn}$. Dès lors, on peut voir l'état cohérent comme un état contenant les états à tout nombre de particules. En effet, la décomposition d'un état cohérent dans la base des états à n particules est donnée par :

$$|\alpha\rangle = \exp^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.28)$$

Le *produit scalaire* entre un état cohérent et un état à n particules est donné par :

$$\langle \alpha^* | n \rangle = \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} \exp^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}, \quad (2.29)$$

et

$$\langle n | \alpha \rangle = \frac{(\alpha)^n}{\sqrt{n!}} \exp^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}. \quad (2.30)$$

Donc, pour un état $|\Psi\rangle$ quelconque, on a :

$$\langle \alpha^* | \Psi \rangle = \Psi(\alpha^*), \quad (2.31)$$

où $\Psi(\alpha^*)$ est une fonction d'onde qui dépend de α^* et :

$$\langle \Psi | \alpha \rangle = \Psi(\alpha), \quad (2.32)$$

où $\Psi(\alpha)$ est une fonction d'onde qui dépend de α .

2.1.7 Etats Comprimés

Un *état comprimé de la lumière* est un état optique non-classique. Ces états ont commencé à être étudiés expérimentalement dans les années 1980.

En optique quantique, ces états sont des états qui saturent l'inégalité d'Heisenberg mais dont la variance ne possède plus de symétrie circulaire mais est comprimée dans une direction et dilatée dans la direction orthogonale à celle qui a subi la compression. On peut donc représenter un état comprimé dans l'espace des phases comme un point entouré d'une ellipse qui représente la variance. Cette ellipse possède une direction que l'on caractérisera par un angle θ qui est l'angle entre la droite passant par le petit axe de l'ellipse et l'axe des positions. D'autre part, l'intensité de la compression est caractérisée par le *facteur de compression* r . Plus le facteur de compression r est grand, plus le rapport entre la longueur du demi-grand axe et du demi-petit axe de l'ellipse sera grand et inversement, l'aire de l'ellipse ne pouvant être affectée par la compression. La compression d'un état est donc caractérisée par deux paramètres réels : le *facteur de compression* r et l'*angle de compression* θ . On peut rassembler ces deux paramètres réels en un paramètre complexe ξ défini comme $\xi = re^{2i\theta}$, le "2" dans l'exponentielle est présent pour que la caractérisation de l'orientation de l'état comprimé soit unique. En effet, le petit axe de l'ellipse caractérisant la variance est un axe de symétrie. Dès lors, θ prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, \pi]$ uniquement.

On peut définir un *opérateur de compression* qui génère une compression sur un état quantique. Cet opérateur est défini par :

$$\hat{S}(\xi) = e^{\frac{1}{2}(\xi \hat{a}^{\dagger 2} - \xi^* \hat{a}^2)}. \quad (2.33)$$

Rappelons que pour cette définition de l'opérateur de compression, l'angle de compression θ correspond dans l'espace des phases à l'angle entre le petit axe de l'ellipse représentant la covariance de l'état et l'axe des positions. La phase optique correspond à l'angle entre le grand axe de cette même ellipse et l'axe des positions. Notons ϕ la phase optique, alors la relation entre la phase optique et l'angle de compression est:

$$\phi = \theta - \frac{\pi}{2}, \quad (2.34)$$

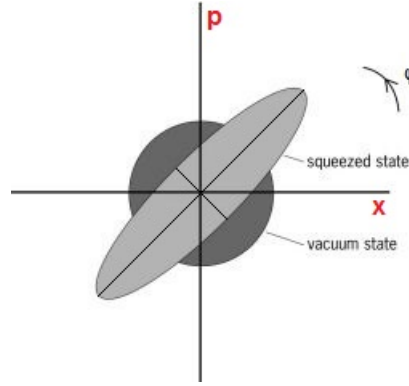
donné en radians. On gardera θ comme paramètre tout au long de ce mémoire, la conversion à la phase optique réelle étant décrite par l'égalité (2.34).

On peut créer un *état comprimé* en agissant avec l'opérateur (2.33) sur l'état du vide :

$$|\xi\rangle = \hat{S}(\xi)|0\rangle, \quad (2.35)$$

comme représenté sur la figure 2.2. En toute généralité, on peut créer un

Figure 2.2: Etat de vide comprimé dans l'espace des phases



Représentation d'un état du vide comprimé dans l'espace des phases optique avec sa zone d'incertitude de forme elliptique en gris clair. [14]

état quantique comprimé quelconque en agissant d'abord avec (2.33) et puis avec (2.13) sur l'état du vide:

$$|\alpha, \xi\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(\xi)|0\rangle. \quad (2.36)$$

Ceci permet de créer un état comprimé dans l'espace des phases comme représenté sur la figure 2.3.

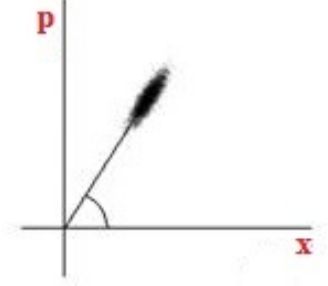
On comprime donc d'abord l'état du vide dans une direction et on le déplace ensuite dans l'espace des phases optique. L'opérateur déplacement change uniquement les valeurs moyennes de l'état mais pas leurs variances, dès lors les variances d'un état du vide comprimé ou d'un état comprimé déplacé seront exactement les mêmes mais centrées autour de différentes valeurs moyennes.

En utilisant l'identité de Baker-Campbell-Hausdorff :

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \dots, \quad (2.37)$$

où A et B sont des opérateurs, on peut trouver les *transformations canoniques* des opérateurs \hat{a} et \hat{a}^\dagger avec l'opérateur de compression (2.33) qui nous donnent les opérateurs de création et d'annihilation *comprimés* :

Figure 2.3: Etat comprimé dans l'espace des phases



Représentation d'un état comprimé dans l'espace des phases optique avec sa zone d'incertitude représentée comme un nuage de points concentrés dans une ellipse. [13]

$$\begin{cases} \hat{a}_\xi = \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a} \hat{S}(\xi) = \hat{a} \cosh(r) - \hat{a}^\dagger e^{2i\theta} \sinh(r), \\ \hat{a}_\xi^\dagger = \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a}^\dagger \hat{S}(\xi) = \hat{a}^\dagger \cosh(r) - \hat{a} e^{-2i\theta} \sinh(r). \end{cases} \quad (2.38)$$

En utilisant la décomposition des opérateurs d'annihilation et de création en termes des opérateurs position et impulsion (2.15) et (2.16), on peut déterminer les opérateurs de position et d'impulsion *comprimés* :

$$\begin{cases} \hat{x}_\xi = \hat{x} [\cosh(r) - \cos(2\theta) \sinh(r)] - \hat{p} \sin(2\theta) \sinh(r), \\ \hat{p}_\xi = \hat{p} [\cosh(r) + \cos(2\theta) \sinh(r)] - \hat{x} \sin(2\theta) \sinh(r). \end{cases} \quad (2.39)$$

Ces opérateurs satisfont aux mêmes relations de commutations que les opérateurs de quadratures non-comprimés. Avec les transformations ci-dessus, on peut calculer les variances :

$$\begin{cases} \Delta^2 \hat{x}_\xi = \frac{1}{2} [\cosh^2(r) + \sinh^2(r) - 2 \cosh(r) \sinh(r) \cos(2\theta)] = \frac{1}{2} [e^{2r} \sin^2(\theta) + e^{-2r} \cos^2(\theta)], \\ \Delta^2 \hat{p}_\xi = \frac{1}{2} [\cosh^2(r) + \sinh^2(r) + 2 \cosh(r) \sinh(r) \cos(2\theta)] = \frac{1}{2} [e^{-2r} \sin^2(\theta) + e^{2r} \cos^2(\theta)], \\ \Delta \hat{x}_\xi \Delta \hat{p}_\xi = \frac{1}{2} [1 + \sin^2(2\theta) \sinh^2(2r)] \geq \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (2.40)$$

qui, pour $\theta = 0$ se réduisent à :

$$\begin{cases} \Delta^2 \hat{x}_\xi = \frac{1}{2} e^{-2r}, \\ \Delta^2 \hat{p}_\xi = \frac{1}{2} e^{2r}, \\ \Delta \hat{x}_\xi \Delta \hat{p}_\xi = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.41)$$

Les variances ci-dessus correspondent à un état comprimé dans la direction d'un des axes de quadrature de l'espace des phases optique. On remarque qu'un tel état sature l'inégalité d'Heisenberg alors que la variance individuelle d'une des quadratures est plus petite que $1/2$ qui est la valeur standard de la variance des quadratures d'un état cohérent. Notons aussi que ces variances restent inchangées pour une mesure *individuelle* de la position ou de l'impulsion d'états comprimés *conjugués*, c'est-à-dire des états comprimés tels que : $\theta \rightarrow -\theta$, puisque l'angle θ n'apparaît que dans le cosinus qui est une fonction symétrique sous une opération d'inversion de l'angle.

Afin de trouver la matrice de covariance, on doit également calculer la covariance entre la position et l'impulsion pour un état comprimé. Cette covariance est donnée par :

$$\frac{1}{2} \langle \hat{x}_\xi \hat{p}_\xi + \hat{p}_\xi \hat{x}_\xi \rangle = -\sin(2\theta) \sinh(r) \cosh(r) = -\frac{1}{2} \sin(2\theta) \sinh(2r). \quad (2.42)$$

A partir de (2.40) et (2.42), on peut écrire la matrice de covariance d'un état comprimé comme :

$$\sigma_\xi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cosh(2r) - \sinh(2r) \cos(2\theta) & -\sinh(2r) \sin(2\theta) \\ -\sinh(2r) \sin(2\theta) & \cosh(2r) + \sinh(2r) \cos(2\theta) \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

On peut calculer le déterminant de cette matrice :

$$\det \sigma_\xi = \frac{1}{4}. \quad (2.44)$$

En utilisant (2.43) et (2.44), on peut calculer la matrice de covariance inverse:

$$\sigma_\xi^{-1} = 2 \begin{pmatrix} \cosh(2r) + \sinh(2r) \cos(2\theta) & \sinh(2r) \sin(2\theta) \\ \sinh(2r) \sin(2\theta) & \cosh(2r) - \sinh(2r) \cos(2\theta) \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Les équations (2.14) et (2.45) permettent de déduire l'expression suivante pour la matrice de Wigner d'un état du vide comprimé :

$$W_\xi(x, p) = \frac{1}{\pi} e^{-[2x^2 \Delta^2 \hat{p}_\xi + 2p^2 \Delta^2 \hat{x}_\xi - 4xp \langle \hat{x}_\xi \hat{p}_\xi + \hat{p}_\xi \hat{x}_\xi \rangle]}, \quad (2.46)$$

qui s'écrit explicitement :

$$W_\xi(x, p) = \frac{1}{\pi} \exp \left[- \left[x^2 [\cosh(2r) + \sinh(2r) \cos(2\theta)] + \right. \right. \\ \left. \left. + p^2 [\cosh(2r) - \sinh(2r) \cos(2\theta)] + 2 x p \sinh(2r) \sin(2\theta) \right] \right], \quad (2.47)$$

en termes des paramètres r et θ de compression. Cette fonction satisfait à la propriété :

$$\iint dx dp W_\xi(x, p, r, \theta) = 1 \quad \forall r, \theta \in \mathbb{R}. \quad (2.48)$$

La fonction de Wigner (2.47) est donc correctement normalisée et peut être utilisée pour calculer les moments statistiques d'un état du vide comprimé.

Une autre quantité intéressante à calculer pour des états comprimés est la valeur moyenne de l'opérateur nombre de particules \hat{n} . En effet, cette quantité vaut $\langle \hat{n} \rangle_\alpha = |\alpha|^2$ pour un état cohérent et est donc nulle pour le vide. Pour un vide comprimé, cette quantité n'est pas strictement nulle mais vaut :

$$\langle \hat{n} \rangle_\xi = \langle 0 | \hat{S}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{S} | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_\xi^\dagger \hat{a}_\xi | 0 \rangle = \sinh^2(r). \quad (2.49)$$

On voit donc que la compression tend à ajouter des particules à l'état du vide.

Si on possède deux modes indépendants, on peut les conjuguer l'un et l'autre avec un même facteur de compression r mais avec des phases conjuguées. L'opérateur correspondant à cette transformation nous sera très utile par la suite et s'écrit :

$$S_{12}(\xi, \xi^*) = S_1(\xi) \otimes S_2(\xi^*) = e^{\frac{1}{2} [\xi (\hat{a}_1^{\dagger 2} - \hat{a}_2^2) + \xi^* (\hat{a}_2^{\dagger 2} - \hat{a}_1^2)]} \quad (2.50)$$

Cet opérateur s'applique donc sur deux modes indépendants du vide pour créer deux modes comprimés conjugués indépendants également. Il nous sera très utile puisque, appliqué sur le vide à deux modes, il décrit l'état initial du système auquel on s'intéresse dans ce mémoire.

2.1.8 Diviseur de Faisceau

Le *diviseur de faisceau* est un dispositif optique permettant de diviser un faisceau lumineux incident en deux faisceaux sortants en utilisant, par exemple, un miroir semi-transparent de réflectance R et de transmittance T .

Quantiquement, on utilise le diviseur de faisceau pour créer une interférence entre deux modes entrants. Cette opération peut s'exprimer comme une rotation entre ces deux modes.

Si deux faisceaux lumineux incidents séparés se rencontrent dans un diviseur de faisceau, les deux modes sortants seront une combinaison linéaire des modes des faisceaux entrants. Cette transformation s'écrit généralement comme [15] :

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{bmatrix}_{out} = \begin{bmatrix} \sqrt{T} & \sqrt{R} \\ \sqrt{R} & -\sqrt{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{bmatrix}_{in}, \quad (2.51)$$

où la transmittance et la réflectance satisfont à la relation :

$$T + R = 1. \quad (2.52)$$

On peut réécrire la transformation (2.51) en termes des quadratures en utilisant la notation vectorielle $\hat{\mathbf{r}} = (\hat{x}, \hat{p})^T$, ce qui nous donne [15] :

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_1 \\ \hat{\mathbf{r}}_2 \end{bmatrix}_{out} = \begin{bmatrix} \sqrt{T}\mathbb{1} & \sqrt{R}\mathbb{1} \\ \sqrt{R}\mathbb{1} & -\sqrt{T}\mathbb{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_1 \\ \hat{\mathbf{r}}_2 \end{bmatrix}_{in}, \quad (2.53)$$

avec $\mathbb{1}$ la matrice identité 2×2 . En utilisant la relation (2.52), on peut réécrire T et R comme :

$$\eta = T = 1 - R, \quad (2.54)$$

et (2.53) se réécrit alors comme :

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_1 \\ \hat{\mathbf{r}}_2 \end{bmatrix}_{out} = \begin{bmatrix} \sqrt{\eta}\mathbb{1} & \sqrt{1-\eta}\mathbb{1} \\ \sqrt{1-\eta}\mathbb{1} & -\sqrt{\eta}\mathbb{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_1 \\ \hat{\mathbf{r}}_2 \end{bmatrix}_{in}. \quad (2.55)$$

Si on prend un *diviseur de faisceau* 50 : 50, alors $\eta = \frac{1}{2}$ et les transformations des opérateurs de quadratures des deux modes s'écrivent explicitement:

$$\begin{aligned} \hat{x}'_1 &= \frac{\hat{x}_1 + \hat{x}_2}{\sqrt{2}}, & \hat{p}'_1 &= \frac{\hat{p}_1 + \hat{p}_2}{\sqrt{2}}, \\ \hat{x}'_2 &= \frac{\hat{x}_1 - \hat{x}_2}{\sqrt{2}}, & \hat{p}'_2 &= \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

où $\hat{x} = \hat{x}_{in}$ et $\hat{x}' = \hat{x}_{out}$. Ces transformations nous seront très utiles par la suite. Ces transformations sont en fait un cas particulier de *transformation de Bogoliubov*. Ce sont des transformations linéaires préservant les relations de commutation canoniques. Elles permettent souvent de diagonaliser des hamiltoniens comme les hamiltoniens quadratiques par exemple.

Etant donné que l'opérateur de compression contient des combinaisons quadratiques d'opérateurs de quadratures, on donne une liste des transformations du diviseur de faisceau de certaines combinaisons de ces opérateurs:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 &= \hat{x}_1'^2 + \hat{x}_2'^2, \\ \hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 &= \hat{p}_1'^2 + \hat{p}_2'^2, \\ \hat{x}_1\hat{p}_1 + \hat{x}_2\hat{p}_2 &= \hat{x}_1'\hat{p}_1' + \hat{x}_2'\hat{p}_2', \\ \hat{x}_1^2 - \hat{x}_2^2 &= 2\hat{x}_1'\hat{x}_2', \\ \hat{p}_1^2 - \hat{p}_2^2 &= 2\hat{p}_1'\hat{p}_2', \\ \hat{x}_1\hat{p}_1 - \hat{x}_2\hat{p}_2 &= \hat{x}_1'\hat{p}_2' + \hat{x}_2'\hat{p}_1'. \end{aligned} \tag{2.57}$$

Nous utiliserons ces relations lorsque l'on transformera nos modes comprimés conjugués dans un diviseur de faisceau dans le chapitre 4.

2.2 Paradoxe EPR et Etats de Bell

En 1935, A. Einstein, B. Podolsky et N. Rosen publient un article [16] dans lequel ils soutiennent que la mécanique quantique est une théorie incomplète. Leur argument est basé sur le concept de *réalité* d'une quantité physique dont ils donnent la condition suffisante suivante : *une condition suffisante pour la réalité d'une quantité physique est la possibilité de la prédire avec certitude, sans perturber le système* [16]. Cependant, en mécanique quantique, deux variables qui ne commutent pas seront soumises au principe d'incertitude d'Heisenberg et ne pourront être connues simultanément avec certitude. Dès lors, de deux choses l'une : soit (1) *la description de la réalité par une fonction d'onde n'est pas complète*, soit (2) *les deux quantités ne peuvent avoir de réalité simultanément* [16]. Le but de Einstein, Podolski et Rosen est maintenant de montrer que (2) est faux et donc (1) doit être vrai c'est-à-dire que la mécanique quantique n'est pas une théorie complète mais qu'il y aurait des *variables cachées*.

2.2.1 Paradoxe EPR

L'argument de EPR pour démontrer que la mécanique quantique n'est pas une théorie complète est l'expérience de pensée suivante. On considère

l'émission d'une paire de spin-1/2 d'une source de spin-0 au repos. Les deux particules émises ont donc des spins opposés ainsi que des directions de propagations opposées. Ces deux spins se trouvent donc dans l'état intriqué suivant :

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle). \quad (2.58)$$

Les deux particules étant spatialement séparées, Einstein, Podolski et Rosen font l'hypothèse que les opérations appliquées sur le deuxième spin sont indépendantes des opérations appliquées sur le premier spin. Ils font l'hypothèse de la localité ! Cependant, de par leur intrication, si l'on mesure le premier spin dans la direction z , on sait que la mesure du deuxième spin dans la même direction nous donnera le résultat opposé du premier spin. Dès lors, on peut mesurer les deux spins dans deux directions différentes, disons z et x , et donc connaître avec certitude S_z et S_x pour chacun des spins alors que \hat{S}_z et \hat{S}_x ne commutent pas. Ils en concluent que (2) est faux et donc la mécanique quantique ne peut pas être une théorie complète. De plus, le fait qu'une mesure d'un des spins dans une direction détermine le résultat de la mesure de l'autre spin dans la même direction semble indiquer qu'il y a une quantité d'information qui voyagerait plus vite que la lumière et qui dicterait au deuxième spin l'état dans lequel il doit se projeter en fonction du résultat obtenu de la mesure du premier spin. Il devrait donc exister des *variables cachées* λ qui permettraient d'expliquer cela sans violer la causalité.

2.2.2 Inégalités de Bell

En 1964, J. S. Bell publie un article [17] dans lequel il démontre que l'interprétation EPR de la mécanique quantique en termes de variables cachées est impossible. Pour cela, il considère une théorie probabiliste générale contenant des variables cachées et en déduit une inégalité sur les corrélations entre résultats de certaines mesures. Cette inégalité existe sous plusieurs formes, la forme la plus connue est sans doute l'*inégalité CHSH* qui s'exprime en général comme [18] :

$$S = E(a, b) + E(a', b) + E(a, b') - E(a', b') \leq 2, \quad (2.59)$$

où a et a' sont les valeurs possibles de mesure pour l'observateur A, b et b' les valeurs possibles de mesure pour l'observateur B et la fonction E est la valeur moyenne du produit de ses arguments : $E(a, b) = \langle ab \rangle$, avec $a, b \in \{-1, 1\}$. La présence ou l'absence de ' réfèrent aux deux choix de mesures possibles pour chacun des expérimentateurs.

Il montre ensuite que des états intriqués tels que les *états de Bell* aussi appelés *états EPR* violent cette inégalité. Ces états sont les suivants :

$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle), \quad |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle - |11\rangle), \\ |\Psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle), \quad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle). \end{aligned} \quad (2.60)$$

La mécanique quantique doit donc être comprise comme une théorie non-locale. C'est l'hypothèse de localité qui était la source du paradoxe EPR. Le théorème de Bell stipule qu'il existe des effets d'intrication en mécanique quantique qui ne peuvent être reproduits par des variables cachées. La référence [18] constitue une revue des aspects de la non-localité associés au théorème de Bell. Au début des années 1980, A. Aspect confirma expérimentalement le théorème de Bell.

Il existe une expression pour des *états EPR* en termes de variables continues qui est donnée par [19]:

$$|EPR\rangle = \int \frac{dp}{2\pi} |p, -p\rangle = \int dx |x, x\rangle. \quad (2.61)$$

Cet état est un état propre à deux modes (notés 0 et 1) de valeur propre nulle des opérateurs $\hat{X} = \hat{x}_0 - \hat{x}_1$ et $\hat{P} = \hat{p}_0 + \hat{p}_1$. Ces états seront utilisés dans la section 3.3. Notons cependant que les états propres des opérateurs \hat{x} et \hat{p} ne sont pas des états physiques.

2.3 Problème de la Phase Quantique

Le problème de la phase quantique peut s'exprimer de plusieurs manières. Une formulation générale peut se faire en posant la question suivante : *quelle est la signification de la phase d'un champ électromagnétique au niveau quantique?* [20]. La réponse à cette question n'est pas évidente comme nous le verrons et nécessite de déterminer un opérateur de phase quantique bien défini au sens de la mécanique quantique et qui permet de retrouver les propriétés classiques de la phase pour de grandes amplitudes. Cette étude a été menée par plusieurs personnes dans le monde et l'on reverra ici certains des modèles les plus importants et influents.

2.3.1 Formalisme de Dirac

Le premier à avoir proposé un formalisme théorique pour la phase quantique est P. A. M. Dirac en 1927 [21]. Cependant, on verra que plusieurs difficultés vont émerger dans son formalisme et mener à des incohérences.

Le problème prend son origine dans la quantification canonique des champs électromagnétiques quand on étudie l'optique quantique. L'amplitude complexe a d'un champ électromagnétique étant un nombre complexe, il peut se décomposer en deux nombre réels x et p de la manière suivante : $a = \frac{x+ip}{\sqrt{2}}$ où a , x et p deviennent des opérateurs lors de la quantification. Cependant, il existe une autre manière de paramétriser l'amplitude complexe a . En effet, Dirac s'inspire de la décomposition polaire d'un nombre complexe $a = Re^{i\phi}$. On peut obtenir la phase de cette relation en la réécrivant sous la forme $e^{i\phi} = \frac{a}{R}$. Dirac quantifie donc l'opérateur de phase en écrivant :

$$e^{i\hat{\phi}} = \hat{a}\hat{R}^{-1}. \quad (2.62)$$

Dirac décompose donc l'opérateur de destruction \hat{a} en un opérateur de norme \hat{R} et un *opérateur de phase* $\hat{\phi}$, qu'il suppose tous les deux hermitiens, de la façon suivante :

$$\hat{a} = e^{i\hat{\phi}}\hat{R}. \quad (2.63)$$

Avec ces définitions, on peut calculer l'opérateur nombre de particules \hat{n} et l'identifier à l'opérateur de norme \hat{R} par : $\hat{R} = \hat{n}^{\frac{1}{2}}$. On obtient donc la décomposition de l'opérateur de phase en termes de l'opérateur de destruction et de l'opérateur nombre de particules :

$$e^{i\hat{\phi}} = \hat{a}\hat{n}^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.64)$$

Cependant, cette expression pour la phase n'est pas correcte. En effet, deux problèmes majeurs vont survenir liés à la non-périodicité et à la non-hermiticité de $\hat{\phi}$.

Prenons un exemple dû à Louisell [22] pour le constater. Louisell montre que $\hat{\phi}$ ne peut pas être un opérateur hermitien en calculant la quantité suivante:

$$\langle l | [\hat{n}, \hat{\phi}] | n \rangle. \quad (2.65)$$

Pour ce faire, il nous faut connaître la valeur du commutateur entre \hat{n} et $\hat{\phi}$. Pour cela, on va utiliser (2.64) et (2.17) qui vont nous donner après un simple calcul le *Critère de Lerner* [23]:

$$[e^{i\hat{\phi}}, \hat{n}] = e^{i\hat{\phi}}. \quad (2.66)$$

En décomposant $e^{i\hat{\phi}}$ en série dans (2.66), on trouve en égalisant les termes d'ordre 0 en $\hat{\phi}$:

$$[\hat{n}, \hat{\phi}] = i. \quad (2.67)$$

On peut déduire de cette relation de commutation une relation d'incertitude par la formule générale :

$$\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} \geq \frac{1}{2} |< [\hat{A}, \hat{B}] >|, \quad (2.68)$$

où A et B sont des opérateurs hermitiens. Cette relation (2.69) n'est vraie que pour des opérateurs hermitiens, la relation d'incertitude entre \hat{n} et $\hat{\phi}$ est donc fausse puisque l'on va montrer que le $\hat{\phi}$ trouvé par Dirac (2.64) n'est pas un opérateur hermitien. Cependant cette relation (2.69) a souvent alimenté des débats phénoménologiques sur la question de la phase quantique, c'est pourquoi nous la mentionnons tout de même :

$$\Delta\hat{n}\Delta\hat{\phi} \geq \frac{1}{2}. \quad (2.69)$$

Cette équation, basée sur l'hypothèse erronée que $\hat{\phi}$ est un opérateur hermitien, est appelée traditionnellement *relation d'incertitude nombre-phase* [24]. Même si elle n'est pas rigoureusement vraie, elle est utilisée dans des approches semi-classiques. On est maintenant capable de calculer (2.65), ce qui nous donne :

$$\langle l | [\hat{n}, \hat{\phi}] | n \rangle = i \langle l | n \rangle. \quad (2.70)$$

Sachant que les états $|n\rangle$ et $|l\rangle$ sont des états propres de \hat{n} de valeurs propres n et l respectivement, on trouve :

$$(l - n) \langle l | \hat{\phi} | n \rangle = i \delta_{ln}. \quad (2.71)$$

Choisir $l = n$ mène à une contradiction puisque l'on obtient alors $0 = i$, ce qui est faux. L'origine de cette erreur vient du fait que l'on a utilisé la relation (2.67) qui n'est valable que si \hat{n} et $\hat{\phi}$ sont des opérateurs hermitiens. On en conclut donc que $\hat{\phi}$ défini par (2.64) n'est pas hermitien, que $e^{i\hat{\phi}}$ n'est pas un opérateur unitaire et que ce n'est donc pas un opérateur de phase satisfaisant. La source de ce problème d'hermiticité de l'opérateur $\hat{\phi}$ réside dans le fait que le spectre de l'opérateur nombre \hat{n} est borné inférieurement comme indiqué par Pegg et Barnett [25].

L'autre problème est dû à la nature périodique de la phase. En effet, un angle n'est pas défini univoquement puisque θ et $\theta + 2\pi n$ produisent la même phase. Cependant, rien ne nous garantit que $\hat{\phi}$ satisfait à cette propriété angulaire. Pour pallier à ce problème, Louisell [22] propose en 1963 d'utiliser des fonctions périodiques telles que $\sin \hat{\phi}$ et $\cos \hat{\phi}$ plutôt que l'opérateur de phase $\hat{\phi}$ lui-même.

Ces raisons ont mené plusieurs chercheurs à se pencher sur le problème et à tenter de construire un formalisme cohérent de la phase quantique.

2.3.2 Formalisme de Susskind et Glogower

Le premier formalisme alternatif à celui introduit par Dirac a été proposé par Leonard Susskind et Jonathan Glogower en 1964. Ils se sont basés sur l'idée de Louisell et ont développé une théorie fonctionnelle basée sur des fonctions périodiques de l'opérateur $\hat{\phi}$. Nous allons présenter succinctement cette théorie ci-dessous étant donné qu'elle souffre encore d'erreurs formelles. Elle est cependant d'un intérêt historique important. Afin d'éviter des erreurs d'interprétation de l'opérateur $\hat{\phi}$, nous adoptons dans cette partie la notation de Carruthers et Nieto [24] où l'on écrit C , S et E à la place de $\cos \hat{\phi}$, $\sin \hat{\phi}$ et $e^{i\hat{\phi}}$. Notons que malgré que C , S et E sont des opérateurs, on ne les écrira pas \hat{C} , \hat{S} et \hat{E} par soucis de clarté et de lisibilité.

L'approche de Susskind-Glogower consiste à définir E en termes des opérateurs de création et d'annihilation par :

$$E = (\hat{n} + 1)^{-\frac{1}{2}} \hat{a}, \quad (2.72)$$

et E^\dagger par :

$$E^\dagger = \hat{a}^\dagger (\hat{n} + 1)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.73)$$

Ces opérateurs E et E^\dagger doivent être compris comme les analogues de $e^{-i\hat{\phi}}$ et $e^{+i\hat{\phi}}$. De là, on définit maintenant les opérateurs C et S correspondant aux opérateurs $\cos \hat{\phi}$ et $\sin \hat{\phi}$ par :

$$C = \frac{1}{2}(E + E^\dagger), \quad (2.74)$$

et :

$$S = \frac{1}{2i}(E - E^\dagger). \quad (2.75)$$

Ces définitions rappellent évidemment les définitions habituelles des fonctions cosinus et sinus. C'est exactement ce que l'on cherche, définir des

fonctions qui ont des propriétés périodiques pour la phase. L'expression des opérateurs E et E^\dagger en termes des états nombre de particules $|n\rangle$ est :

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n+1|, \quad (2.76)$$

et :

$$E^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} |n+1\rangle\langle n|. \quad (2.77)$$

On remarque que la somme est bornée inférieurement sur n par 0, on va voir que ceci mènera à des problèmes concernant l'unitarité de ces opérateurs. En effet, en utilisant (2.76) et (2.77), on voit que E n'est pas tout à fait un opérateur unitaire car :

$$EE^\dagger = 1, \quad (2.78)$$

mais :

$$E^\dagger E = 1 - |0\rangle\langle 0|. \quad (2.79)$$

La présence du projecteur sur le vide dans cette dernière relation empêche E d'être un opérateur unitaire. Cependant, il pourra être considéré comme *quasi-unitaire* pour des états optiques à grand nombre de particules c'est-à-dire des états pour lesquels $\langle \hat{n} \rangle \gg 1$.

Différentes relations peuvent être calculées entre les opérateurs C , S et l'opérateur nombre de particules \hat{n} . Commençons par les relations de commutations entre ces opérateurs :

$$[C, \hat{n}] = iS, \quad (2.80)$$

$$[S, \hat{n}] = -iC, \quad (2.81)$$

$$[C, S] = \frac{1}{2}i|0\rangle\langle 0|. \quad (2.82)$$

Remarquons que la présence du projecteur sur l'état du vide dans (2.82) empêche les opérateurs C et S de commuter. De plus, une autre identité trigonométrique ne va pas être satisfaite par la présence de ce projecteur :

$$C^2 + S^2 = 1 - \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0|. \quad (2.83)$$

On voit donc que le formalisme de Susskind-Glogower souffre encore de certains problèmes liés au fait que E n'est pas un opérateur unitaire à strictement parler. La présence de ce projecteur dans le vide complique également fort les calculs et rend leur formalisme difficile à utiliser. Cependant, on peut déjà en tirer certaines informations.

En effet, on peut déterminer les états propres de l'opérateur E en demandant qu'ils satisfassent l'égalité suivante :

$$E|e^{i\phi}\rangle = e^{i\phi}|e^{i\phi}\rangle, \quad (2.84)$$

dont un ensemble de solutions est donné par :

$$|e^{i\phi}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\phi}|n\rangle. \quad (2.85)$$

Ces états satisfont à une relation de fermeture [26] :

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi |e^{i\phi}\rangle \langle e^{i\phi}|. \quad (2.86)$$

En effet, les états $|e^{i\phi}\rangle$ forment un ensemble complet. Notons que dans certaines références, les états (2.85) apparaissent normalisés.

On peut calculer les valeurs moyennes et les variances des opérateurs C et S sur plusieurs états (nombre de particules, cohérents, comprimés...). On ne le fera pas ici. Cependant des détails concernant ces résultats peuvent se trouver dans [20], référence sur laquelle je me suis principalement inspiré pour écrire cette section.

2.3.3 Formalisme de Pegg et Barnett

On a vu que le formalisme introduit par Dirac pour l'opérateur de phase quantique est sujet à des problèmes d'unitarité et de périodicité. Le formalisme de Susskind-Glogower résout le problème de périodicité en introduisant des fonctions périodiques de l'opérateur de phase. Cependant, le problème d'unitarité n'a pas pu être résolu. Plusieurs propositions ont été faites pour résoudre ce problème d'unitarité. Le plus aboutit et le plus simple à utiliser est celui introduit et développé par D. T. Pegg et S. M. Barnett à la fin des années 1980. Nous introduisons leur formalisme dans cette partie.

P. Carruthers et M. M. Nieto [24] ont montré en 1968 que pour que les états (2.85) puissent être les états propres d'un opérateur de phase hermitien, il faudrait étendre le spectre du nombre de particules de $-\infty$ à $+\infty$.

L'interprétation de ces états $| - n \rangle$ étant difficile, Pegg et Barnett ont proposé une autre manière de résoudre le problème d'hermiticité en considérant un opérateur de phase fini dimensionnellement.

Dans le formalisme de Pegg-Barnett, on se restreint à un *sous-espace* de Hilbert de dimension $(s + 1)$ dans lequel on peut choisir comme base l'ensemble complet des états de phase suivants :

$$|\theta_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^s e^{in\theta_m} |n\rangle, \quad (2.87)$$

où $\theta_m = \theta_0 + 2m\pi/(s+1)$ avec $m = 0, 1, 2, \dots, s$ et θ_0 est l'angle de référence. Ces états de phases sont orthonormaux. On peut exprimer les états nombres de particules $|n\rangle$ sur cette base d'états de phase, ce qui nous donne :

$$|n\rangle = \sum_{m=0}^s |\theta_m\rangle \langle \theta_m | n \rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{m=0}^s e^{-in\theta_m} |\theta_m\rangle. \quad (2.88)$$

On peut définir un opérateur de phase appelé l'*opérateur de phase hermitien de Pegg-Barnett* sur base des états (2.87) :

$$\hat{\phi}_s \equiv \sum_{m=0}^s \theta_m |\theta_m\rangle \langle \theta_m|. \quad (2.89)$$

On peut maintenant définir une distribution de probabilité en se donnant un état $|\psi\rangle$ quelconque :

$$P_\psi(\theta_m) = |\langle \theta_m | \psi \rangle|^2, \quad (2.90)$$

qui va nous permettre de calculer la valeur moyenne ou encore la variance de l'angle de phase sur différents états.

Avec l'opérateur de phase défini en (2.89), on peut définir les opérateurs suivants comme :

$$e^{i\hat{\phi}_\theta} = \sum_{m=0}^s e^{i\theta_m} |\theta_m\rangle \langle \theta_m|, \quad (2.91)$$

$$\cos \hat{\phi}_\theta = \sum_{m=0}^s \cos \theta_m |\theta_m\rangle \langle \theta_m|, \quad (2.92)$$

$$\sin \hat{\phi}_\theta = \sum_{m=0}^s \sin \theta_m |\theta_m\rangle \langle \theta_m|, \quad (2.93)$$

qui sont à comparer avec les opérateurs E , C et S dans le formalisme de Susskind-Glogower.

Avant de faire un calcul explicite, il faut d'abord soulever un point subtil du formalisme de Pegg-Barnett. En effet, on a défini les états et l'opérateur de phase dans un sous-espace de Hilbert fini dimensionnel pour assurer l'hermiticité de l'opérateur $\hat{\phi}_s$. Cependant, pour avoir des résultats *physiques*, il faut se trouver dans l'espace de Hilbert qui est l'espace dont on a besoin pour décrire un oscillateur harmonique quantique, et non pas un sous-espace. Dans le formalisme de Pegg-Barnett, on fait donc d'*abord* tous les calculs dans le sous-espace de dimension $(s+1)$ qui nous donne des résultats dépendants d'un paramètre s et *ensuite* on prend la limite $s \rightarrow \infty$. En effet, V. Buzek *et al.* [28] ont conclu en 1992 que *cette procédure ne constituait pas un problème pour obtenir des résultats cohérents en prenant la limite infinie-dimensionnelle* [20].

Pour illustrer cette méthode de calcul, on va obtenir quelques résultats simples en utilisant le formalisme de Pegg-Barnett. Commençons tout d'abord par calculer la distribution de probabilité de la phase d'un état à n particules $|n\rangle$, en utilisant (2.87) on trouve :

$$P_n(\theta_m) = |\langle \theta_m | n \rangle|^2 = \frac{1}{s+1}. \quad (2.94)$$

On peut maintenant calculer la valeur moyenne de l'opérateur de phase $\hat{\phi}_\theta$ pour un état à n particules :

$$\langle n | \hat{\phi}_\theta | n \rangle = \sum_{m=0}^s |\langle \theta_m | n \rangle|^2 = \frac{1}{s+1} \sum_{m=0}^s \theta_m = \theta_0 + \frac{s}{s+1} \pi \rightarrow \theta_0 + \pi. \quad (2.95)$$

Remarquons que l'on a bien fait attention à prendre la limite $s \rightarrow \infty$ à la *fin* du calcul. De la même manière on peut calculer la variance :

$$\langle n | \hat{\phi}_\theta^2 | n \rangle = \frac{1}{s+1} \sum_{m=0}^s \theta_m^2 = \theta_0^2 + \frac{2\pi s \theta_0}{s+1} + \frac{2\pi^2 s(2s+1)}{(s+1)^2}. \quad (2.96)$$

Dès lors, en prenant la limite $s \rightarrow \infty$, on obtient :

$$\langle \hat{\phi}_\theta \rangle = \theta_0 + \pi, \quad (2.97)$$

$$\Delta \hat{\phi}_\theta^2 = \frac{\pi^2}{3}. \quad (2.98)$$

Cette variance correspond bien à une distribution de phase uniforme, puisque pour $P(\theta) = 1/2\pi$, on a la variance classique suivante :

$$\Delta\theta^2 = \langle\theta^2\rangle - \langle\theta\rangle^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \theta^2 d\theta = \frac{\pi^2}{3}. \quad (2.99)$$

En effet, les états à n particules sont des états sans phases préférentielles, il est donc normal que l'on retrouve une variance correspondant à une distribution de phase uniforme.

Le formalisme de Pegg-Barnett est donc un formalisme qui, malgré qu'il demande de passer par un sous-espace de Hilbert fini, donne des résultats cohérents dès que l'on prend la limite pour retrouver l'espace de Hilbert physique. C'est un formalisme qui ne souffre plus des erreurs liées à l'hermiticité ou à la périodicité. Il constitue donc un formalisme adapté aux prédictions théoriques et un contexte formel dans lequel on peut étudier la phase quantique. Cependant, le formalisme semble être mis en défaut par des expériences [27], il ne faut donc pas prendre les résultats *stricto sensu* mais plutôt comme un indicateur du comportement du système étudié.

2.4 Statistique Circulaire

Les données circulaires nous apparaissent dans la vie de tous les jours. Par exemple, lire l'heure sur une montre à aiguilles ou s'orienter à l'aide d'une boussole nous demande de lire des données réparties circulairement. On peut donc, utiliser ces variables pour faire de la statistique dite *circulaire*. En effet, on verra qu'un traitement statistique usuel peut mener à des résultats faux. Des applications typiques de la statistique circulaire sont par exemple l'étude directionnelle de la migration des oiseaux, de la densité du trafic sur une autoroute au cours d'une journée, d'une semaine ou d'une année, de la direction des vents en météorologie ou encore tous les phénomènes périodiques que l'on peut rencontrer dans la nature. En effet, ces observations peuvent être représentées sur un cercle unité. Il existe également des données qui peuvent se représenter sur une sphère de rayon unité. La répartition des étoiles sur la sphère céleste en astronomie ou la perception des directions dans des conditions d'apesanteur simulée en psychologie [29] en sont des exemples. Ce mémoire traitant de la détermination et de l'amélioration de la mesure d'une phase quantique, il semble évident qu'il nous faut des éléments de statistique circulaire. Cette section a été écrite sur base du Chapitre 1 et 2 de la référence [32].

2.4.1 Pourquoi la Statistique Circulaire ?

On peut se demander pourquoi on ne pourrait pas utiliser les outils de la statistique usuelle pour des variables aléatoires circulaires. On montrera par un exemple ci-dessous quel genre de problèmes peut survenir si on n'adapte pas nos outils statistiques. On ne fera pas une étude détaillée de l'origine de ces problèmes, ceci n'étant pas le but de ce mémoire, mais on se convaincra de la nécessité d'utiliser la statistique circulaire.

Soit un cercle de rayon unité sur lequel on définit une orientation ($\theta = 0^\circ$). Prenons une variable aléatoire distribuée sur un ensemble discret de 2 points équiprobables sur le cercle, l'un formant un angle $\theta = 1^\circ$ et l'autre un angle $\theta = 359^\circ$ par rapport à l'orientation choisie sur le cercle. Les angles sont ici exprimés en degrés. Pour un nombre pair n d'événements, la moyenne usuelle sera alors donnée par

$$\langle \theta \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta_i. \quad (2.100)$$

Les deux points de la distribution étant équiprobables ($P(\theta = 1^\circ) = P(\theta = 359^\circ) = \frac{1}{2}$) et puisque n est pair on aura une moyenne :

$$\langle \theta \rangle = \frac{1}{n} \left(\frac{n}{2} 1^\circ + \frac{n}{2} 359^\circ \right) = \frac{1}{2} (1^\circ + 359^\circ) = 180^\circ.$$

Ce résultat est fort gênant. En effet, pour des données groupées autour de $\theta = 0$ on trouve un angle moyen situé à l'opposé sur le cercle, en $\theta = 180^\circ$. De plus, si on calcule l'écart-type dans sa forme usuelle $\Delta\theta = \sqrt{\langle \theta^2 \rangle - \langle \theta \rangle^2}$, on trouve :

$$\Delta\theta = \sqrt{\frac{1}{2} ((1^\circ)^2 + (359^\circ)^2) - (180^\circ)^2} = 179^\circ.$$

Ce résultat est tout à fait en contradiction avec les données réelles qui sont situées à un degré de distance de l'axe de référence $\theta = 0^\circ$. Ceci nous indique que l'on va devoir utiliser une nouvelle statistique pour traiter des variables circulaires de manière cohérente.

Ce type de problème est encore plus frappant quand on prend un exemple concret. Si par exemple, on veut étudier la migration des oiseaux [30], on peut imaginer une expérience qui consiste à lâcher des oiseaux migrateurs d'une même espèce en période de migration et enregistrer les directions au décollage qu'emprunte chaque oiseau. On peut alors indiquer chaque direction sur le cercle unité en prenant par exemple comme orientation de

référence le pôle sud magnétique terrestre. En automne, par exemple, la plupart des oiseaux migrateurs voyagent vers des pays plus chauds pour y passer l'hiver. En simplifiant le problème, la majorité de nos données sera orientée vers le sud ($\theta = 0^\circ$). Cependant, si on calcule la moyenne statistique usuelle, on en conclut que la direction moyenne qu'empruntent les oiseaux migrateurs en automne est le nord. Cependant, ce résultat est juste le contraire de ce qui se passe dans la réalité! De plus, le même genre d'erreur apparaît pour le calcul des variances. On ne peut donc pas faire confiance à la statistique habituelle pour des variables circulaires car elle mène à des résultats faux.

On voit donc que le caractère circulaire d'une variable aléatoire produit des incohérences si elle est traitée avec la statistique habituelle. On va donc introduire les notions de statistique circulaire que nous aurons besoin pour définir une erreur sur la phase qui est cohérente.

2.4.2 Préliminaires et Notations

On peut paramétrer les directions dans un plan soit par un vecteur unité $\mathbf{x} = (\cos(\theta), \sin(\theta))^T$, soit par un nombre complexe $z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$. Ce sont deux manières équivalentes de représenter un point situé sur un cercle de rayon unité. Il faut définir une orientation initiale avec une direction donnée sur le cercle unité. L'angle θ correspond à l'angle formé entre le vecteur pointant notre donnée sur le cercle et cette direction de référence. Cette direction de référence sera imposée par le faisceau auxiliaire lors de la mesure homodyne. Dès lors, on remarque que les angles (pris maintenant en radians) θ et $\theta + 2\pi$ correspondent au même point sur le cercle. Tous les calculs se feront dès lors modulo 2π .

2.4.3 Mesure de la Localisation

On se donne un ensemble de n données sur le cercle unité représentées chacune par un vecteur unité \mathbf{u}_i où $i = 1, \dots, n$. A chaque vecteur \mathbf{u}_i correspond un angle θ_i . On définit alors la *direction principale* $\bar{\theta}$ de $\theta_1, \dots, \theta_n$ comme étant l'angle de la direction du vecteur résultant de la somme des n vecteurs \mathbf{u}_i : $\mathbf{U} = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i$. On peut également définir les coordonnées cartésiennes (\bar{C}, \bar{S}) du centre de masse en terme des coordonnées cartésiennes des vecteurs $\mathbf{u}_i = (\cos(\theta_i), \sin(\theta_i))$ comme :

$$\bar{C} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(\theta_i), \quad \bar{S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin(\theta_i). \quad (2.101)$$

Par conséquent, $\bar{\theta}$ est la solution des équations :

$$\bar{C} = \bar{R} \cos \bar{\theta}, \quad \bar{S} = \bar{R} \sin \bar{\theta}, \quad (2.102)$$

où \bar{R} s'appelle la *longueur résultante principale* et est donnée par :

$$\bar{R} = \sqrt{\bar{C}^2 + \bar{S}^2}. \quad (2.103)$$

On note que la *direction principale* est *equivariante* sous la rotation de l'ensemble des données alors que la *longueur résultante principale* est *invariante* sous cette même rotation. Ceci implique que si deux expérimentateurs utilisent un axe de référence différent, leurs résultats seront cohérents l'un avec l'autre.

Notons une propriété de la longueur résultante principale: étant donné que les vecteurs \mathbf{x}_i sont de norme 1 (car ils sont répartis sur le cercle unité), on en déduit que :

$$0 \leq \bar{R} \leq 1. \quad (2.104)$$

Si \bar{R} est proche de 1, on en déduit que les données sont rassemblées autour de $\bar{\theta}$. Cependant, un \bar{R} proche de 0 n'implique pas nécessairement que les données sont réparties de manière homogène sur le cercle. En effet, le même résultat serait obtenu si les données étaient réparties sur deux pôles diamétralement opposés du cercle.

La longueur résultante principale \bar{R} est donc une mesure de la concentration des données. On va définir la *variance circulaire* V à partir de la longueur résultante principale comme :

$$V = 1 - \bar{R}. \quad (2.105)$$

C'est cette notion de variance que l'on utilisera pour déterminer la variance sur une variable circulaire. Notons encore que étant donné (2.104) et la définition de V , il est évident que l'on a aussi:

$$0 \leq V \leq 1. \quad (2.106)$$

Des moments d'ordre supérieurs peuvent également être définis pour des variables circulaires. Cette variance circulaire pourrait donc être utilisée pour mesurer l'erreur sur une phase étant donné sa nature circulaire. Cependant, nous opterons pour une estimation de la phase basée sur les mesures corrélations entre les quadratures des états comprimés. Notons finalement que d'autres mesures de l'incertitude sur la phase ont été développées (voir par exemple la référence [31]).

Chapter 3

Travaux Préliminaires

La technique que nous utilisons dans le chapitre 4 de ce mémoire pour améliorer la mesure de la phase ne s'est pas faite en un jour. En effet, elle a été l'aboutissement de plus de dix années de travaux et fait encore l'objet d'études plus récentes [38]. Nous allons revoir ici dans les grandes lignes l'idée originale et son évolution jusqu'au travail de N. J. Cerf et S. Iblisdir [37] qui sera commenté plus en détails étant donné que la technique que l'on utilise y est décrite explicitement.

3.1 Mesures Individuelles et Mesure Globale

L'idée de base est due à Asher Peres et William K. Wootters [33] qui, en 1991, se sont posés la question suivante : *peut-on obtenir plus d'information au moyen d'un appareil interagissant avec plusieurs particules d'un système globalement plutôt que par des mesures individuelles sur chaque particule séparément?*

Ils considèrent dans leur article un système composé de deux parties indépendantes (i.e. on suppose qu'elles n'ont jamais interagi dans le passé), par exemple deux spins- $\frac{1}{2}$ indépendants. Peres et Wootters prennent l'exemple d'un système de deux spins de même orientation et qui n'admet que trois directions possibles. Ces trois directions reposent dans un plan et sont séparées d'un angle de 120 degrés entre-elles. On oriente la première direction selon l'axe z et les deux autres dans un plan coupant cet axe, chacune des directions étant séparée d'un angle de 120 degrés par rapport aux deux autres. Ils nomment ces directions, les *signal directions*. Ils se demandent ensuite comment un observateur extérieur peut déterminer avec le plus de précision possible dans quelle direction sont orientés les deux spins- $\frac{1}{2}$. Etant donné

que les directions ne sont pas orthogonales, il restera toujours une incertitude dans la réponse. Il faut donc trouver une manière de mesurer ces états pour répondre à la question avec la plus grande certitude. Ils testent plusieurs méthodes de mesure mais ne trouvent aucune méthode mesurant les spins individuellement plus efficace qu'une mesure globale du système de spins. Ils conjecturent donc que l'on peut tirer plus d'information d'une mesure globale sur l'ensemble des particules plutôt que par des mesures individuelles.

Notons finalement que, pour donner un sens précis à ce genre de problème, il faut choisir avec attention la manière dont on va quantifier l'information gagnée. A. Peres et W. K. Wootters optent dans leur article pour la mesure standard de l'information développée par Shannon, en termes de l'entropie associée. Ce problème de quantification de l'information est un problème récurrent dans ce type d'étude.

Quatres années plus tard, S. Massar et S. Popescu [34] ont confirmé la conjecture faite par A. Peres et W. K. Wootters. En effet, la conjecture consistait, dans son essence, à se demander *s'il y avait plus d'information dans un système considéré dans son ensemble plutôt que comme la somme de ses parties* [34].

Pour ce faire, ils considèrent un "jeu quantique". Ce jeu se fait en plusieurs tours. A chaque tour, le joueur reçoit N particules de spin- $\frac{1}{2}$ tous orientés dans la même direction et parallèles. Les directions possibles des spins sont distribuées sur une sphère. A chaque tour, l'orientation des spins change. Le but pour le joueur est, à chaque fois, de déterminer avec la plus grande précision dans quelle direction sont orientés les N spins. Il peut pour cela, faire toutes les mesures qu'il désire sur le système de N spins. Le score obtenu par le joueur à chaque tour est donné par $\cos^2(\frac{\alpha}{2})$ où α est l'angle entre la direction réelle des spins et celle devinée par le joueur. Ensuite, on calcule la moyenne des scores sur tous les tours. Ce score final sera un nombre compris entre 0 et 1 et vaut $\frac{1}{2}$ si le joueur devine la solution aléatoirement. On voit donc de nouveau qu'il a fallu choisir une manière de quantifier l'information ou, dans ce cas-ci, l'erreur que l'on fait sur la direction des spins. Dans la suite de leur article, ils montrent que le score maximal atteignable pour un système de N spins est $\frac{N+1}{N+2}$.

Le résultat qui nous intéresse le plus est la démonstration que la mesure individuelle de chaque partie d'un ensemble quantique fini n'est pas optimale. La mesure optimale doit prendre en compte l'intrication et donc considérer le système dans son ensemble. Pour ce faire, ils partent de la notion de mesure en deux étapes introduite par Von Neumann [35]. La première étape consiste en l'interaction du système avec l'appareil de mesure et la

seconde en la "lecture" du même appareil de mesure. Ils trouvent une condition de norme sur les états de l'appareil de mesure après l'interaction avec le système et construisent une fonction de l'information obtenue en lisant l'appareil de mesure, qui correspond en fait au score réalisé par le joueur à chaque tour. Ils construisent ensuite la fonction moyenne S d'information à l'aide de la probabilité d'avoir une certaine sortie ξ si l'appareil de mesure se trouve dans un certain état initial. Finalement, le problème devient la maximisation de la fonction moyenne S par rapport à toutes les mesures et stratégies possibles tout en respectant la condition de norme sur les états de l'appareil de mesure après interaction avec le système mesuré. Ceci leur donne une équation linéaire avec un paramètre de Lagrange. Pour terminer leur démonstration, ils montrent que toute mesure du système considéré comme la somme de ses parties individuelles est en contradiction avec l'équation linéaire déduite de la maximisation sous contrainte de la fonction score moyen S . Il faut donc une mesure sur l'ensemble du système pour optimiser la mesure. Je renvoie le lecteur à leur article [34] pour plus de détails.

On est donc maintenant convaincu qu'il est plus avantageux (dans le sens que l'on peut tirer plus d'information) d'effectuer une mesure sur un système considéré dans son ensemble plutôt que sur chacune de ses parties, du moins pour des systèmes qui sont des ensembles quantiques finis. Ceci sera le point de départ pour développer des méthodes d'amélioration de la mesure de qbits, une étape incontournable dans le processus d'échange d'information par voie quantique.

3.2 Spins Parallèles et Antiparallèles

En 1999, N. Gisin et S. Popescu [36] font une nouvelle avancée. En effet, ils se demandent si l'on peut obtenir plus d'information en l'encodant dans deux qbits dont les spins seraient orientés sur une sphère antiparallèlement $|\vec{n}, -\vec{n}\rangle$ plutôt que parallèlement $|\vec{n}, \vec{n}\rangle$.

La réponse à cette question est évidente pour un système classique : il n'y a aucun gain à inverser la direction du second spin. En effet, il suffirait de "retourner" le second bit avant de le lire ou de lire le second bit et de comprendre son opposé. Un spin classique peut être vu comme une flèche, il n'y a pas de raison qu'on ne puisse pas indiquer une direction dans l'espace en prenant la convention que la direction que l'on veut indiquer soit la direction opposée à celle pointée par la flèche. Pour un système classique, deux spins parallèles $|\vec{n}, \vec{n}\rangle$ ou antiparallèles $|\vec{n}, -\vec{n}\rangle$ indiquent tout aussi

bien une direction dans l'espace. Remarquons que l'on aurait tout aussi bien pu prendre un seul spin classique avec une mesure classique ne perturbant pas le système. On peut ainsi effectuer plusieurs mesures sur le même spin.

Les choses sont très différentes pour un système de spins quantiques général. En effet, les spins obéissent au principe de superposition et il peut y avoir de l'intrication. Dans notre cas, c'est la possibilité qu'il y ait une intrication dans les vecteurs propres de la mesure optimale qui va faire la différence. En effet, des spins antiparallèles étant des états orthogonaux, il ne peut y avoir d'intrication entre-eux.

Pour montrer leur résultat, N. Gisin et S. Popescu vont considérer deux cas, dans le premier la direction \vec{n} des couples de spins qu'envoie Alice à Bob est distribué aléatoirement et uniformément sur le cercle unité et dans le second, on suppose que les directions \vec{n} sont orientées vers les sommets d'un tétraèdre. Ils vont utiliser la fidélité :

$$F = \int dn \sum_g P(g|\vec{n}) \frac{1 + \vec{n} \cdot \vec{n}_g}{2}, \quad (3.1)$$

pour quantifier la précision avec laquelle Bob a "deviné" la bonne direction, où \vec{n} est la direction des spins, et \vec{n}_g la direction mesurée par Bob. Dans les deux cas, ils trouvent que la fidélité est plus élevée si les états sont composés de spins antiparallèles plutôt que de spins parallèles. On peut donc retrouver l'information envoyée par Alice de manière plus efficace si elle l'encode dans deux spins antiparallèles plutôt que dans deux spins parallèles.

On peut se demander aussi quelle est l'origine de ce résultat *a priori* contraintif. N. Gisin et S. Popescu en font aussi une analyse. Pour comprendre le phénomène, ils commencent par reprendre le cas d'un seul spin orienté dans la direction $-\vec{n}$. On peut alors faire deux types de transformations pour trouver la direction \vec{n} .

Tout d'abord, on peut retourner le spin pour le remettre dans la bonne direction avant de le mesurer. Ce genre de transformation est dite *active* car elle change l'état du spin. Cependant, il n'existe pas de machine quantique universelle parfaite qui retourne le spin, c'est-à-dire qui effectue l'opération:

$$\vec{n} \rightarrow -\vec{n}. \quad (3.2)$$

En effet, cette opération est impossible car elle demanderait une transformation anti-unitaire qui n'est pas une transformation *physique*. Il existe cependant des *universal quantum spin-flip machines (UQSF)*, qui permettent de rapprocher la direction du spin de la direction $-\vec{n}$.

D'autre part, on peut effectuer une transformation *passive*, par exemple en retournant son instrument de mesure pour inverser les directions de mesure. Ceci est tout à fait réalisable, il semblerait donc qu'encoder une direction \vec{n} dans un spin qui pointe vers \vec{n} ou $-\vec{n}$ n'est finalement qu'une question de convention.

Les choses changent si l'on encode une direction dans deux spins antiparallèles. Malgré que l'état $|\vec{n}, \vec{n}\rangle$ est un produit direct $|\vec{n}\rangle \otimes |\vec{n}\rangle$, de l'intrication va apparaître au niveau des états propres de la mesure optimale (comme décrit par S. Massar et S. Popescu pour deux spins parallèles, voir [34] ou section 3.1). En effet, les états propres de la mesure optimale sont des états intriqués de directions particulières. Ces états propres ne sont pas les mêmes selon que les spins sont orientés parallèlement ou antiparallèlement. N. Gisin et S. Popescu ont montré que la fidélité (3.1) est plus élevée si l'orientation des spins est encodée antiparallèlement que si elle est encodée parallèlement.

On a maintenant tous les outils en main pour adapter cette technique aux systèmes quantiques à variables dites *continues*. N. Cerf et S. Iblisdir ont développé une technique basée sur les concepts revus ci-dessus pour des états gaussiens [37]. Ils encodent l'information dans deux états gaussiens conjugués et montrent qu'il y a plus d'information qui est encodée dans ces deux états conjugués plutôt qu'en prenant deux fois le même état. C'est le sujet de la section suivante.

3.3 Conjugaison de Phase de Variables Continues Quantiques

Dans cette partie, nous allons voir qu'il est impossible de conjuguer parfaitement un état quantique. On va donc construire un processus imparfait de conjugaison de phase optimal. Ensuite, on verra qu'il est plus efficace d'encoder l'information dans deux états cohérents conjugués plutôt que dans deux états cohérents identiques. Cette partie est un résumé commenté de l'article *Phase conjugation of continuous quantum variables* de N.J. Cerf et S. Iblisdir [37]. Cette section est importante pour ce mémoire puisqu'on y décrit la technique développée par N. Cerf et S. Iblisdir que l'on adaptera par la suite au cas d'états quantiques comprimés.

3.3.1 Conjugaison de phase et bruit

Quelle est l'action d'un *opérateur de conjugaison de phase* C sur un mode simple \hat{a} ? Cet opérateur change le signe devant \hat{p} mais pas celui devant \hat{x} , ce qui revient à remplacer \hat{a} par \hat{a}^\dagger .

En effet, $C\hat{a}C^\dagger = C(\frac{\hat{x}+i\hat{p}}{\sqrt{2}})C^\dagger = \frac{\hat{x}-i\hat{p}}{\sqrt{2}} = \hat{a}^\dagger$.

Cependant, cette opération est physiquement impossible car elle ne conserve pas les relations de commutation :

Soit

$$\hat{b} = \hat{a}^\dagger = C\hat{a}C^\dagger,$$

alors on a :

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] = -[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = -1 \neq 1. \quad (3.3)$$

Cependant, on peut réaliser cette opération de manière imparfaite en admettant qu'elle introduit un bruit non nul. Pour évaluer ce bruit, considérons deux modes (0 et 1) initialement préparés dans *l'état EPR* (2.61).

Les opérateurs \hat{X} et \hat{P} peuvent être diagonalisés simultanément car

$$\begin{aligned} [\hat{X}, \hat{P}] &= [\hat{x}_0 - \hat{x}_1, \hat{p}_0 + \hat{p}_1] = [\hat{x}_0, \hat{p}_0] + [\hat{x}_0, \hat{p}_1] - [\hat{x}_1, \hat{p}_0] - [\hat{x}_1, \hat{p}_1] = [\hat{x}_0, \hat{p}_0] - [\hat{x}_1, \hat{p}_1] \\ &= 2i\delta_{00} - 2i\delta_{11} = 0. \end{aligned}$$

On peut donc comprendre l'état EPR comme représentant deux particules avec une position relative $x_0 - x_1$ et une impulsion totale $p_0 + p_1$, tous deux arbitrairement proches de 0. Si on applique maintenant l'opérateur de conjugaison de phase sur le mode 1, sans toucher au mode 0, l'état EPR sera alors transformé en l'état propre de valeur propre 0 des opérateurs \hat{X}' et \hat{P}' définis comme :

$$\hat{x}_0 - \hat{x}_1 = \hat{x}'_0 - \hat{x}'_1 \equiv \hat{X}',$$

$$\hat{p}_0 + \hat{p}_1 = \hat{p}'_0 - \hat{p}'_1 \equiv \hat{P}'.$$

Maintenant, si les modes 0' et 1' obéissent aux règles de commutation standard $\left([\hat{x}'_k, \hat{p}'_k] = i\delta_{kk'}\right)$ alors \hat{X}' et \hat{P}' ne commutent plus et $[\hat{X}', \hat{P}'] = 2i$. La relation d'incertitude d'Heisenberg nous donne :

$$\Delta\hat{X}'\Delta\hat{P}' \geq \frac{1}{2} |<[\hat{X}', \hat{P}']>| = \frac{1}{2} |2i| = 1, \quad (3.4)$$

où la première inégalité est la définition de la relation d'incertitude d'Heisenberg.

3.3. CONJUGAISON DE PHASE DE VARIABLES CONTINUES QUANTIQUES 41

On suppose maintenant que le processus de conjugaison de phase introduit un bruit et l'on veut déterminer la quantité minimale de bruit qu'il faut pour satisfaire la relation d'incertitude d'Heisenberg ci-dessus.

Pour ce faire, on va introduire un bruit aléatoire n_x et n_p sur x'_1 et p'_1 respectivement. On isole donc la contribution du bruit dans le processus pour l'étudier. Ceci peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\hat{x}'_1 &= \hat{x}_1 + n_x, \\ \hat{p}'_1 &= -\hat{p}_1 + n_p.\end{aligned}$$

On suppose que n_x et n_p ne sont pas corrélés à \hat{x}_0 , \hat{x}_1 , \hat{p}_0 et \hat{p}_1 . De plus, on le prend non-biaisé ($\langle n_x \rangle = \langle n_p \rangle = 0$) et on demande que la transformation soit "universelle" c'est-à-dire que les variances de n_x et de n_p soient les mêmes, disons σ^2 . Dès lors, la variance de \hat{X}' et \hat{P}' devient :

$$\Delta \hat{X}'^2 = \Delta \hat{P}'^2 = \sigma^2, \quad (3.5)$$

étant donné que la variance de $\hat{x}_0 - \hat{x}_1$ et de $\hat{p}_0 + \hat{p}_1$ s'annule pour des états EPR.

Le résultat (3.5) combiné avec la relation d'incertitude (3.4) dérivée plus haut nous donne donc que :

$$\sigma^2 \geq 1,$$

ce qui est le double de la variance d'une quadrature dans l'état du vide ($\Delta x_{vac}^2 = 1/2$). On a donc une borne inférieure pour le bruit engendré par le processus de conjugaison de phase.

3.3.2 Transformation de conjugaison de phase optimale

La construction d'une transformation de conjugaison de phase optimale, c'est-à-dire une transformation qui atteint la borne inférieure vue dans la section 3.3.1, se fait en couplant le mode d'entrée, préparé dans un état cohérent $|\alpha\rangle$, à un mode d'ancilla par une transformation unitaire telle que le mode résultant se trouve dans un état mélangé aussi proche que possible de l'état $|\alpha^*\rangle$.

La conjugaison de phase est l'équivalent continu de l'opération de *spin-flip* qui permet (de manière imparfaite) de transformer un état $|\vec{n}\rangle$ (une particule de spin $\frac{1}{2}$ polarisée dans la direction \vec{n} par exemple) en un état $|\vec{-n}\rangle$. S'il n'y a que deux orientations possibles, alors l'opération de spin-flip est apparentée à une opération *NOT-universelle* qui transforme un bit $|1\rangle$ en bit $|0\rangle$ et inversement.

Dans ce qui suit, \hat{a}_1 se rapportera au mode d'entrée, \hat{a}_2 au mode d'ancilla, \hat{b}_1 au mode de sortie conjugué et \hat{b}_2 à l'ancilla transformé. Evidemment, les modes d'entrée et de sortie et les modes d'ancillas ne sont pas corrélés entre eux.

La transformation (voir [37]) est donnée par :

$$\begin{cases} \hat{b}_1 = \hat{a}_1^\dagger + \sqrt{2} \hat{a}_2, \\ \hat{b}_2 = \sqrt{2} \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger. \end{cases} \quad (3.6)$$

Cette transformation décrit exactement un amplificateur linéaire de conjugaison de phase et est insensible à la phase.

Voyons maintenant si la variance du bruit de la sortie de ce conjugateur de phase sature bien l'inégalité d'Heisenberg. En effet, si on définit $\hat{x}_{b_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{b}_1 + \hat{b}_1^\dagger)$ et $\hat{p}_{b_1} = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\hat{b}_1 - \hat{b}_1^\dagger)$, alors, en utilisant successivement la définition de \hat{b}_1 et \hat{b}_2 et ensuite l'expression des opérateurs de création et d'annihilation en termes de \hat{x} et \hat{p} , on trouve que :

$$(\Delta x^2)_{b_1} = (\Delta p^2)_{b_1} = (\Delta x^2)_{vac} + 2(\Delta x^2)_{vac} = \frac{3}{2}$$

où le terme $(\Delta x^2)_{vac}$ correspond à l'erreur habituelle sur la mesure d'une des quadratures (\hat{x} ou \hat{p}) et le terme $2(\Delta x^2)_{vac}$ correspond au bruit induit par la conjugaison de phase qui vaut donc bien le double du bruit du vide, c'est-à-dire, $2(\Delta x^2)_{vac} = 1$. On voit en outre que $2(\Delta x^2)_{vac} = \sigma^2$, ce qui montre que cette transformation sature la borne d'Heisenberg et est donc *optimale*. En particulier, si l'entrée est un état cohérent $|\alpha\rangle$, alors la sortie sera un mélange gaussien d'états cohérents ρ de variance 1 centrée en $|\alpha^*\rangle$.

Une mesure de la distance entre deux états quantiques est donnée par la *fidélité*. La fidélité entre deux états arbitraires ω et χ est donnée par :

$$F(\chi, \omega) = \left(\text{Tr} \sqrt{\sqrt{\chi} \omega \sqrt{\chi}} \right)^2.$$

En conséquence, la fidélité de la conjugaison de phase est :

$$F = \langle \alpha^* | \rho | \alpha^* \rangle = \frac{1}{2},$$

comme pour une mesure optimale.

Aucune propriété quantique n'a été utilisée *pendant* le processus de conjugaison de phase. En effet, les aspects quantiques viennent lors de la mesure. On en déduit que la conjugaison de phase est intrinsèquement un processus classique. Elle peut tout aussi bien être obtenue en mesurant

simultanément les deux quadratures de $|\alpha\rangle$ et puis un état cohérent dont p aurait changé de signe.

3.3.3 Optimisation de la mesure d'états cohérents

Avec cette opération de conjugaison de phase en main, on peut maintenant voir comment l'utiliser pour améliorer l'échange d'information entre Alice et Bob. Prenons la situation où Alice veut communiquer un nombre complexe $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + ip)$ à Bob. On autorise à Alice d'utiliser deux fois un canal quantique pour envoyer à Bob deux états cohérents d'une amplitude $|\alpha|^2$ chacuns. De plus, Alice possède un conjugateur de phase comme celui décrit ci-dessus. Deux possibilités s'offrent dès lors à Alice :

- envoyer à Bob l'état produit $|\alpha\rangle^{\otimes 2}$;
- envoyer à Bob l'état produit $|\alpha\rangle \otimes |\alpha^*\rangle$.

Dans le premier cas, la meilleure stratégie pour mesurer x et p avec la même précision est de réaliser une mesure simultanée des deux quadratures de chaque état cohérent $|\alpha\rangle$. Cette mesure jointe nous donne $(\sqrt{2}x, \sqrt{2}p)$ avec une variance:

$$\Delta(\sqrt{2}x)\Delta(\sqrt{2}p) = 2\Delta x\Delta p = 2\Delta x_{vac}^2 = 1.$$

La variance résultante sur x et p est donc égale à la moitié de la variance ci-dessus, à savoir $\Delta x_{vac}^2 = \frac{1}{2}$. Il s'agit juste du facteur statistique. Envoyer deux copies du même état n'apporte donc pas plus d'information qu'une mesure individuelle sur un seul état.

Dans le deuxième cas, lorsque Bob reçoit l'état produit $|\alpha\rangle \otimes |\alpha^*\rangle$, il peut utiliser différentes stratégies de mesure. Tout d'abord, il peut comme dans le cas précédent effectuer une mesure produit, en tenant compte du fait que la valeur mesurée pour p dans le deuxième état doit être lue comme $-p$. Cette stratégie nous donnera la même variance $\Delta x_{vac}^2 = \frac{1}{2}$.

Cependant, puisque notre conjugateur de phase (ou transformation NOT-universelle) a une fidélité différente de 1, il reste la possibilité qu'il existe une mesure de $|\alpha\rangle \otimes |\alpha^*\rangle$ qui n'est pas de la forme produit et donne une variance $< \frac{1}{2}$. C'est à cette stratégie que nous allons nous intéresser.

La mesure intriquée de l'état produit $|\alpha\rangle \otimes |\alpha^*\rangle$ va nous donner la variance $< \frac{1}{2}$. Décrivons explicitement cette mesure. On écrit les deux modes d'entrée comme :

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= e^{a\hat{a}_1^\dagger - a^*\hat{a}_1}|0\rangle = e^{ip\hat{x}_1 - ix\hat{p}_1}|0\rangle, \\ |\alpha^*\rangle &= e^{a^*\hat{a}_2^\dagger - a\hat{a}_2}|0\rangle = e^{-ip\hat{x}_2 - ix\hat{p}_2}|0\rangle. \end{aligned}$$

Dès lors, si on définit les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} \hat{X} &= \hat{x}_1 - \hat{x}_2, \\ \hat{P} &= \hat{p}_1 + \hat{p}_2, \end{aligned}$$

qui sont des opérateurs qui commutent. On peut réécrire, l'état produit sous la forme suivante :

$$|\alpha\rangle \otimes |\alpha^*\rangle = e^{ip\hat{X} - ix\hat{P}}|0\rangle,$$

Bob peut maintenant envoyer chacun des deux états d'entrée $|\alpha\rangle$ et $|\alpha^*\rangle$ sur une entrée d'un diviseur de faisceau, caractérisé par la tranformation canonique :

$$\begin{aligned} \hat{x}'_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}_1 + \hat{x}_2), & \hat{p}'_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{p}_1 + \hat{p}_2), \\ \hat{x}'_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}_1 - \hat{x}_2), & \hat{p}'_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2). \end{aligned} \tag{3.7}$$

L'état produit $|\alpha\rangle \otimes |\alpha^*\rangle$ peut alors se réécrire comme :

$$|\alpha\rangle \otimes |\alpha^*\rangle = e^{i\sqrt{2}p\hat{x}'_2 - i\sqrt{2}x\hat{p}'_1}|0\rangle,$$

où x et p peuvent être mesurés *séparément* en appliquant une détection homodyne sur les modes 1' et 2'. Une mesure de \hat{p}'_1 nous donne $\sqrt{2}x$ en moyenne et une mesure de \hat{x}'_2 nous donne $\sqrt{2}p$ en moyenne également. Les mesures sur \hat{p}'_1 et \hat{x}'_2 ont toutes les deux une erreur de $\Delta x_{vac}^2 = \frac{1}{2}$. Dès lors, on a :

$$\Delta(\sqrt{2}x)^2 = \frac{1}{2} \implies \Delta x^2 = \frac{1}{4},$$

$$\Delta(\sqrt{2}p)^2 = \frac{1}{2} \implies \Delta p^2 = \frac{1}{4}.$$

On a donc pu améliorer la précision sur la mesure de x et de p en les séparant par un diviseur de faisceau et en effectuant des mesures séparées et indépendantes sur les deux systèmes.

On voit qu'il vaut donc mieux pour Alice d'envoyer x et p à Bob en les encodant dans deux états cohérents conjugués $|\alpha\rangle \otimes |\alpha^*\rangle$ plutôt que dans deux copies de $|\alpha\rangle$.

3.4 Supériorité des Mesures Globales

En 2007, J. Niset *et al.* [38] publient un nouveau résultat sur le problème de la mesure d'états quantiques cohérents. Pour ces états, J. Niset *et al.* démontrent théoriquement *et* expérimentalement qu'une mesure globale sur deux états cohérents conjugués est meilleure que n'importe quelle stratégie locale accompagnée de communication classique (Local Operation Classical Communication). Un point important est le fait qu'ils utilisent des états cohérents, dits quasi-classiques. Cet effet d'amélioration de la mesure d'états conjugués est donc d'origine purement quantique. Voici un bref résumé de leur démonstration théorique.

On considère un ensemble $\{P(\alpha), |\alpha\rangle|\alpha^*\rangle\}$, où $P(\alpha)$ est une distribution gaussienne et $|\alpha\rangle$ un état cohérent. Notre but est de mesurer l'état $|\alpha\rangle|\alpha^*\rangle$, et d'ensuite tenter de préparer un état cohérent $|\alpha\rangle$ aussi proche que possible de l'état cohérent de départ. Quatres cas sont considérés :

- LOCC sur l'état bipartite $|\alpha\rangle|\alpha\rangle$;
- mesure globale sur l'état bipartite $|\alpha\rangle|\alpha\rangle$;
- LOCC sur l'état bipartite $|\alpha\rangle|\alpha^*\rangle$;
- mesure globale sur l'état bipartite $|\alpha\rangle|\alpha^*\rangle$.

On associe une *fidélité* F_L , F , F_L^* et F^* respectivement pour chacune des stratégies étudiées. La fidélité utilisée pour estimer la qualité de la mesure dans chacune des stratégies énumérées ci-dessus est la fidélité principale définie comme :

$$F = \sup_{M_i} \sup_{\rho_i} \sum_i \int d\alpha P(\alpha) \langle \alpha | \langle \alpha^* | M_i | \alpha \rangle | \alpha^* \rangle \langle \alpha | \rho_i | \alpha \rangle, \quad (3.8)$$

où M_i sont les opérateurs positifs définissant la mesure et ρ_i sont les matrices densité des états préparés avec l'information obtenue par la mesure. Ils montrent dès lors la série d'égalités (et d'inégalité) suivantes :

$$F_L^* = F_L = F < F^*, \quad (3.9)$$

en montrant tout d'abord que les stratégies LOCC optimales sur $|\alpha\rangle|\alpha\rangle$ et $|\alpha\rangle|\alpha^*\rangle$ ont les mêmes fidélités, ce qui démontre la première égalité de (3.9); ensuite en montrant que la stratégie optimale pour mesurer l'état bipartite $|\alpha\rangle|\alpha\rangle$ est une stratégie locale, donc $F_L = F$. Finalement, on peut trouver une mesure jointe de l'état $|\alpha\rangle|\alpha^*\rangle$ qui donne une fidélité plus grande que

pour une mesure jointe sur deux copies de $|\alpha\rangle$ en utilisant la technique décrite dans la section 3.3 et [37] par exemple.

Notons finalement que cette propriété non-classique peut être vue comme un effet non-local dû à une propriété globale du système et non pas aux propriétés quantiques individuelles de chaque état $|\alpha\rangle$. L'intrication, qui est le phénomène à la base de ces résultats, est donc bien plus riche et subtile qu'elle ne peut paraître au premier abord.

Chapter 4

Amélioration de la Mesure de la Phase

On utilise ici la méthode introduite dans la section 3.3 et on l'applique pour deux états comprimés. Cette technique ayant permis une mesure globale des quadratures de deux états cohérents qui améliore les variances de celles-ci par rapport à une mesure individuelle. On espère pouvoir améliorer la mesure des corrélations entre les quadratures d'un état comprimé. Ces corrélations nous donneront de l'information sur la phase de d'un état comprimé.

4.1 Mesure de Deux Etats Comprimés et Conjugués

On considère le cas de deux états comprimés indépendants de même facteur de compression $r = r_1 = r_2$ et dont les angles de compression sont opposés l'un par rapport à l'autre : $\theta_2 = -\theta_1$. Ceci est équivalent à : $\xi_2 = \xi_1^*$, c'est pourquoi on va appeler ces états *conjugués*. Etant donné les égalités ci-dessus, on ingorera par la suite les indices des facteurs complexes de compression ξ . On peut créer ces états en agissant avec l'opérateur défini en (2.50) sur l'état du vide à deux modes $|0\rangle^{\otimes 2}$:

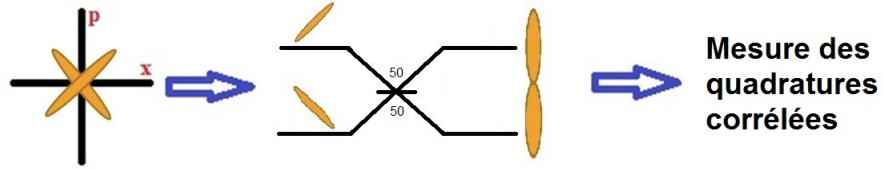
$$|\xi, \xi^*\rangle = S_1(\xi) \otimes S_2(\xi^*)|0\rangle^{\otimes 2} = e^{\frac{1}{2}[\xi(\hat{a}_1^{\dagger 2} - \hat{a}_2^2) + \xi^*(\hat{a}_2^{\dagger 2} - \hat{a}_1^2)]}|0\rangle^{\otimes 2}. \quad (4.1)$$

Cet état étant séparable, on peut indépendamment mesurer l'opérateur position d'un mode et l'opérateur impulsion de l'autre. Les variances associées à ces mesures seront les variances standards d'une mesure individuelle d'un

état comprimé et sont données par (2.40). On va maintenant tenter, en s'inspirant de la technique développée par N. J. Cerf et S. Iblisdir rappelée dans la section 3.3, d'améliorer ces variances, c'est-à-dire de les rendre inférieures aux variances standards (2.40).

Le schéma est le suivant (voir Figure 4.1) : on passe chacun des deux modes de (4.1) dans une des entrées d'un diviseur de faisceau, ceci va nous créer un état intriqué. Ensuite, on mesure la position sur un des deux modes et l'impulsion sur l'autre mode. On verra qu'un binôme de mesures des quadratures aura des variances inférieures ou égales aux variances standards.

Figure 4.1: Schema de la technique de mesure.



La technique de mesure se divise en 3 étapes. Tout d'abord, on commence avec deux états comprimés conjugués l'un par rapport à l'autre (à gauche) que l'on envoie ensuite dans un diviseur de faisceau 50:50 (au centre). Finalement, on obtient deux états intriqués à la sortie du diviseur de faisceau dont on mesure les quadratures par détection homodyne (à droite).

Le passage dans un diviseur de faisceau 50:50, transforme l'opérateur (2.50) en:

$$S'_{12}(\xi, \xi^*) = e^{\frac{r}{2} [\cos(2\theta) (\hat{a}_1'^{\dagger 2} + \hat{a}_2'^{\dagger 2} - \hat{a}_1'^2 - \hat{a}_2'^2) + 2i \sin(2\theta) (\hat{a}_1'^{\dagger} \hat{a}_2'^{\dagger} + \hat{a}_1' \hat{a}_2')]} \quad (4.2)$$

et son transposé conjugué s'écrit:

$$S_{12}'^{\dagger}(\xi, \xi^*) = e^{\frac{-r}{2} [\cos(2\theta) (\hat{a}_1'^{\dagger 2} + \hat{a}_2'^{\dagger 2} - \hat{a}_1'^2 - \hat{a}_2'^2) + 2i \sin(2\theta) (\hat{a}_1'^{\dagger} \hat{a}_2'^{\dagger} + \hat{a}_1' \hat{a}_2')]} \quad (4.3)$$

où r est devenu $-r$. On peut donner une expression de ces opérateurs en termes des opérateurs de quadratures en utilisant les identités suivantes:

$$\begin{cases} \hat{a}_1'^{\dagger 2} + \hat{a}_2'^{\dagger 2} - \hat{a}_1'^2 - \hat{a}_2'^2 = -2i(\hat{x}'_1 \hat{p}'_1 - \hat{x}'_2 \hat{p}'_2) - 2, \\ \hat{a}_1'^{\dagger} \hat{a}_2'^{\dagger} + \hat{a}_1' \hat{a}_2' = \hat{x}'_1 \hat{x}'_2 - \hat{p}'_1 \hat{p}'_2. \end{cases} \quad (4.4)$$

On peut alors écrire les opérateurs (4.2) et (4.3) en termes des opérateurs position et impulsion pour les modes 1 et 2 comme:

$$\begin{cases} S'_{12}(\xi, \xi^*) = e^{-r \cos(2\theta)} e^{-ir [\cos(2\theta)(\hat{x}'_1 \hat{p}'_1 - \hat{x}'_2 \hat{p}'_2) - \sin(2\theta)(\hat{x}'_1 \hat{x}'_2 - \hat{p}'_1 \hat{p}'_2)]}, \\ S'^{\dagger}_{12}(\xi, \xi^*) = e^{r \cos(2\theta)} e^{ir [\cos(2\theta)(\hat{x}'_1 \hat{p}'_1 - \hat{x}'_2 \hat{p}'_2) - \sin(2\theta)(\hat{x}'_1 \hat{x}'_2 - \hat{p}'_1 \hat{p}'_2)]}. \end{cases} \quad (4.5)$$

On voit que les deux modes sont maintenant intriqués, il y a un mélange entre les opérateurs du mode 1 et 2. Notons que le passage dans le diviseur de faisceau ne donne pas lieu à de l'intrication si les deux états à l'entrée sont identiques. On ne peut donc pas intriquer deux états comprimés identiques avec le diviseur de faisceau. Les deux états vont rester indépendants et on est alors contraint d'effectuer une mesure individuelle des quadratures sur chacun des états pour obtenir des corrélations.

On peut maintenant calculer les quantités suivantes:

$$\begin{cases} \hat{x}'_{1\xi} = S'^{\dagger}_{12} \hat{x}'_1 S'_{12}, \\ \hat{p}'_{1\xi} = S'^{\dagger}_{12} \hat{p}'_1 S'_{12}, \\ \hat{x}'_{2\xi} = S'^{\dagger}_{12} \hat{x}'_2 S'_{12}, \\ \hat{p}'_{2\xi} = S'^{\dagger}_{12} \hat{p}'_2 S'_{12}. \end{cases} \quad (4.6)$$

Ces nouveaux opérateurs nous permettront de calculer les moyennes et les variances des quadratures des deux modes après le diviseur de faisceau. Etant donné que les opérateurs S'_{12} et S'^{\dagger}_{12} sont des exponentielles des opérateurs \hat{x}'_1, \hat{p}'_1 , \hat{x}'_2 et \hat{p}'_2 , on va devoir utiliser l'identité de Baker-Campbell-Hausdorff pour calculer les nouveaux opérateurs de quadratures ci-dessus. On rappelle l'identité de Baker-Campbell-Hausdorff :

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \dots \quad (4.7)$$

Dès lors, en identifiant :

$$A = ir [\cos(2\theta) (\hat{x}'_1 \hat{p}'_1 - \hat{x}'_2 \hat{p}'_2) - \sin(2\theta) (\hat{x}'_1 \hat{x}'_2 - \hat{p}'_1 \hat{p}'_2)], \quad (4.8)$$

et $B = \hat{x}'_{1\xi}, \hat{p}'_{1\xi}, \hat{x}'_{2\xi}$ et $\hat{p}'_{2\xi}$, on peut calculer les commutateurs apparaissant dans (4.7). Les relations de commutations pour les opérateurs de quadratures étant données par :

$$[\hat{x}'_i, \hat{p}'_j] = i\delta_{ij}, \quad (4.9)$$

où $i, j = 1, 2$. Ce sont les règles de commutation standards pour un état à plusieurs modes. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
[A, \hat{x}'_1] &= r (\cos(2\theta) \hat{x}'_1 + \sin(2\theta) \hat{p}'_2), \\
[A, \hat{p}'_1] &= -r (-\sin(2\theta) \hat{x}'_2 + \cos(2\theta) \hat{p}'_1), \\
[A, \hat{x}'_2] &= -r (\cos(2\theta) \hat{x}'_2 - \sin(2\theta) \hat{p}'_1), \\
[A, \hat{p}'_2] &= r (\sin(2\theta) \hat{x}'_1 + \cos(2\theta) \hat{p}'_2).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

On peut exprimer ces égalités de manière compacte en utilisant le vecteur $\hat{\mathbf{r}}' = (\hat{x}'_1, \hat{p}'_2, \hat{x}'_2, \hat{p}'_1)^T$, on a alors :

$$[A, \hat{\mathbf{r}}'] = \begin{pmatrix} [A, \hat{x}'_1] \\ [A, \hat{p}'_2] \\ [A, \hat{x}'_2] \\ [A, \hat{p}'_1] \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} +\cos(2\theta) & \sin(2\theta) & 0 & 0 \\ \sin(2\theta) & +\cos(2\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ 0 & 0 & \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}'_1 \\ \hat{p}'_2 \\ \hat{x}'_2 \\ \hat{p}'_1 \end{pmatrix} = C \hat{\mathbf{r}}'. \tag{4.11}$$

Remarquons que la matrice C est diagonale par blocs, ceci nous indique qu'il existe deux paires d'opérateurs corrélés : la paire \hat{x}'_1 et \hat{p}'_2 et la paire \hat{x}'_2 et \hat{p}'_1 . On parlera aussi de paires conjuguées pour les désigner. Chacune de ces deux paires contient des opérateurs conjugués de modes différents. Ceci va nous permettre à la sortie du diviseur de faisceau de mesurer indépendamment les variables de position et d'impulsion associées à ces opérateurs.

Ensuite, par itération, on peut trouver le n^{eme} commutateur de l'identité de Baker-Campbell-Hausdorff : $[A, \dots, [A, [A, \hat{\mathbf{r}}']] \dots] = C^n \hat{\mathbf{r}}'$. En pratique, cela revient, pour chaque commutateur, à calculer un binôme de Newton d'ordre n dont les variables sont $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$ et dont les combinaisons formant une fonction paire de θ multiplient un opérateur et les combinaisons formant une fonction impaire de θ multiplient l'autre opérateur. Explicitement, ceci nous donne pour les composantes \hat{x}'_1 et \hat{p}'_2 :

$$\begin{aligned}
[A, \dots, [A, [A, \hat{x}'_1]] \dots] &= \frac{r^n}{2} [(\cos(2\theta) + \sin(2\theta))^n (\hat{x}'_1 + \hat{p}'_2) + \\
&\quad + (\cos(2\theta) - \sin(2\theta))^n (\hat{x}'_1 - \hat{p}'_2)], \\
[A, \dots, [A, [A, \hat{p}'_2]] \dots] &= \frac{r^n}{2} [(\cos(2\theta) + \sin(2\theta))^n (\hat{p}'_2 + \hat{x}'_1) + \\
&\quad + (\cos(2\theta) - \sin(2\theta))^n (\hat{p}'_2 - \hat{x}'_1)],
\end{aligned} \tag{4.12}$$

et pour les composantes \hat{x}'_2 et \hat{p}'_1 :

$$\begin{aligned}
[A, \dots, [A, [A, \hat{x}'_2]] \dots] &= \frac{r^n}{2} [(\cos(2\theta) + \sin(2\theta))^n (\hat{x}'_2 - \hat{p}'_1) + \\
&\quad + (\cos(2\theta) - \sin(2\theta))^n (\hat{x}'_2 + \hat{p}'_1)], \\
[A, \dots, [A, [A, \hat{p}'_1]] \dots] &= \frac{r^n}{2} [(\cos(2\theta) + \sin(2\theta))^n (\hat{p}'_1 - \hat{x}'_2) + \\
&\quad + (\cos(2\theta) - \sin(2\theta))^n (\hat{p}'_1 + \hat{x}'_2)],
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Dès lors, en sommant toutes les contributions pondérées par les facteurs présents dans l'identité de Baker-Campbell-Hausdorff, on trouve les expressions suivantes pour (4.6):

$$\begin{aligned}
\hat{x}'_{1\xi} &= S_{12}'^\dagger \hat{x}'_1 S_{12}' = \frac{e^{r \cos(2\theta)}}{2} [e^{r \sin(2\theta)} (\hat{x}'_1 + \hat{p}'_2) + e^{-r \sin(2\theta)} (\hat{x}'_1 - \hat{p}'_2)], \\
\hat{p}'_{2\xi} &= S_{12}'^\dagger \hat{p}'_2 S_{12}' = \frac{e^{r \cos(2\theta)}}{2} [e^{r \sin(2\theta)} (\hat{x}'_1 + \hat{p}'_2) - e^{-r \sin(2\theta)} (\hat{x}'_1 - \hat{p}'_2)], \\
\hat{x}'_{2\xi} &= S_{12}'^\dagger \hat{x}'_2 S_{12}' = \frac{e^{-r \cos(2\theta)}}{2} [e^{r \sin(2\theta)} (\hat{x}'_2 + \hat{p}'_1) + e^{-r \sin(2\theta)} (\hat{x}'_2 - \hat{p}'_1)], \\
\hat{p}'_{1\xi} &= S_{12}'^\dagger \hat{p}'_1 S_{12}' = \frac{e^{-r \cos(2\theta)}}{2} [e^{r \sin(2\theta)} (\hat{x}'_2 + \hat{p}'_1) - e^{-r \sin(2\theta)} (\hat{x}'_2 - \hat{p}'_1)].
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Maintenant que l'on a des expressions en termes des quadratures après le passage dans le diviseur de faisceau, on peut calculer les moments d'ordre un et deux en les contractant avec l'état du vide $|0\rangle$. En effet, soit un opérateur \hat{O} , alors mesurer cet opérateur \hat{O} sur des états comprimés revient à calculer:

$$\begin{aligned}
Tr \left(\hat{O} |\xi\rangle \langle \xi| \right) &= Tr \left(\hat{O} \hat{S}(\xi) |0\rangle \langle 0| \hat{S}^\dagger(\xi) \right) = Tr \left(\hat{S}^\dagger(\xi) \hat{O} \hat{S}(\xi) |0\rangle \langle 0| \right) = \\
&= Tr \left(\hat{O}_\xi |0\rangle \langle 0| \right), \tag{4.15}
\end{aligned}$$

par la propriété cyclique de la trace. On peut donc se contenter de contracter ces opérateurs à gauche et à droite par des états du vide $|0\rangle$ pour calculer leurs moments. Etant donné que les quadratures comprimées sont linéaires en les quadratures initiales après passage dans le diviseur de faisceau et que $\langle \hat{x}'_1 \rangle = \langle \hat{p}'_1 \rangle = \langle \hat{x}'_2 \rangle = \langle \hat{p}'_2 \rangle = 0$, on sait que leurs moyennes seront toutes nulles :

$$\begin{aligned}\langle \hat{x}'_{1\xi} \rangle &= 0, & \langle \hat{p}'_{1\xi} \rangle &= 0, \\ \langle \hat{x}'_{2\xi} \rangle &= 0, & \langle \hat{p}'_{2\xi} \rangle &= 0,\end{aligned}\tag{4.16}$$

ce qui est en accord avec notre intuition, puisque nous avons au départ deux modes du vide comprimés.

Cependant, le résultat intéressant concerne la variance de ces quadratures comprimées. Cette variance se réduit donc au moment d'ordre 2 de ces quadratures. Pour la calculer, commençons par trouver l'expression des opérateurs (4.14) au carré :

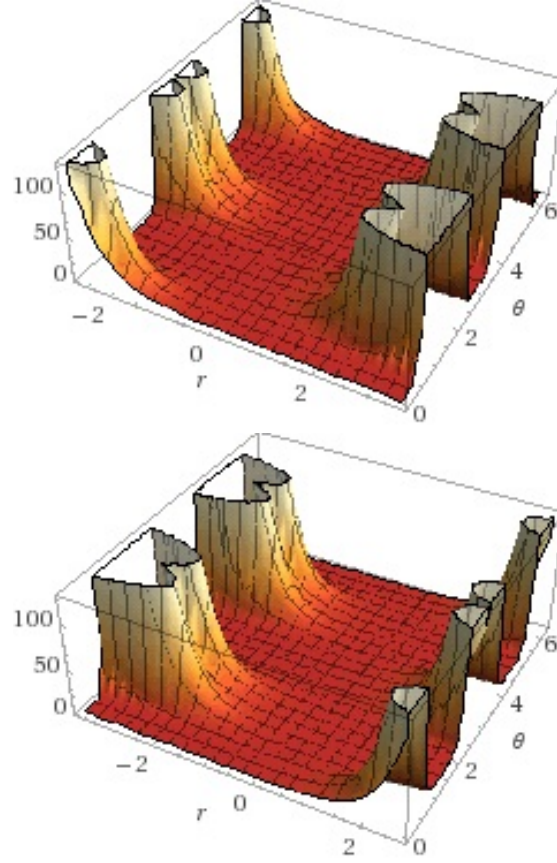
$$\begin{aligned}\hat{x}_{1\xi}^{\prime 2} &= \frac{e^{2r \cos(2\theta)}}{2} [\cosh(2r \sin(2\theta))(\hat{x}_1^{\prime 2} + \hat{p}_2^{\prime 2}) + 2 \sinh(2r \sin(2\theta))\hat{x}_1' \hat{p}_2' + (\hat{x}_1^{\prime 2} - \hat{p}_2^{\prime 2})], \\ \hat{p}_{2\xi}^{\prime 2} &= \frac{e^{2r \cos(2\theta)}}{2} [\cosh(2r \sin(2\theta))(\hat{x}_1^{\prime 2} + \hat{p}_2^{\prime 2}) + 2 \sinh(2r \sin(2\theta))\hat{x}_1' \hat{p}_2' - (\hat{x}_1^{\prime 2} - \hat{p}_2^{\prime 2})], \\ \hat{x}_{2\xi}^{\prime 2} &= \frac{e^{-2r \cos(2\theta)}}{2} [\cosh(2r \sin(2\theta))(\hat{x}_2^{\prime 2} + \hat{p}_1^{\prime 2}) + 2 \sinh(2r \sin(2\theta))\hat{x}_2' \hat{p}_1' + (\hat{x}_2^{\prime 2} - \hat{p}_1^{\prime 2})], \\ \hat{p}_{1\xi}^{\prime 2} &= \frac{e^{-2r \cos(2\theta)}}{2} [\cosh(2r \sin(2\theta))(\hat{x}_2^{\prime 2} + \hat{p}_1^{\prime 2}) + 2 \sinh(2r \sin(2\theta))\hat{x}_2' \hat{p}_1' - (\hat{x}_2^{\prime 2} - \hat{p}_1^{\prime 2})].\end{aligned}\tag{4.17}$$

Connaissant les variances suivantes : $\Delta^2 \hat{x}_1' = \Delta^2 \hat{p}_1' = \Delta^2 \hat{x}_2' = \Delta^2 \hat{p}_2' = \frac{1}{2}$, on en déduit le résultat suivant :

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta^2 \hat{x}'_{1\xi} &= \Delta^2 \hat{p}'_{2\xi} = \frac{e^{2r \cos(2\theta)}}{2} \cosh(2r \sin(2\theta)), \\ \Delta^2 \hat{x}'_{2\xi} &= \Delta^2 \hat{p}'_{1\xi} = \frac{e^{-2r \cos(2\theta)}}{2} \cosh(2r \sin(2\theta)).\end{aligned}}\tag{4.18}$$

Ce sont les variances associées aux états comprimés et conjugués après leur passage dans le diviseur de faisceau que l'on recherchait. Nous devons maintenant analyser si elles sont meilleures que les variances standards des états comprimés données par (2.40). Notons que les variances (4.18) dépendent du facteur de compression r et de l'angle de compression θ . Si on suppose que r est fixé et connu, on peut déduire l'angle θ grâce aux valeurs de ces variances. Il est intéressant aussi de noter que les variances sont les mêmes pour les paires de quadratures corrélées définies plus haut. Il semble donc que, selon le signe de r et la valeur de θ , il est plus intéressant de mesurer l'une ou l'autre paire de variables conjuguées. On peut voir la dépendance en r et θ des variances (4.18) sur les graphes de la figure 4.2.

L'espace des phases optique peut se diviser en deux zones selon qu'il soit plus intéressant de mesurer l'une ou l'autre paire d'opérateurs \hat{x}' et \hat{p}' . Les

Figure 4.2: Représentation graphique de $\Delta^2 \hat{x}'_{2\xi} = \Delta^2 \hat{p}'_{1\xi}$ et $\Delta^2 \hat{x}'_{1\xi} = \Delta^2 \hat{p}'_{2\xi}$


Variance de $\hat{x}'_{2\xi}$ et $\hat{p}'_{1\xi}$ en haut et de $\hat{x}'_{1\xi}$ et $\hat{p}'_{2\xi}$ en bas. Notons la forte dépendance en θ dès que r s'éloigne de 0. Il apparaît des zones de faibles et fortes variances à r fixé selon les valeurs de θ .

bords de ces zones sont déterminés par la condition suivante :

$$\Delta^2 \hat{x}'_{2\xi} = \Delta^2 \hat{x}'_{1\xi}, \quad (4.19)$$

qui, en remplaçant par leurs formes explicites et en supposant $r \geq 0$, se réduit à :

$$1 = e^{4r \cos(2\theta)}, \quad (4.20)$$

où r est un paramètre connu et fixé. On en déduit que les frontières entre ces zones sont donc données par l'équation en θ suivante :

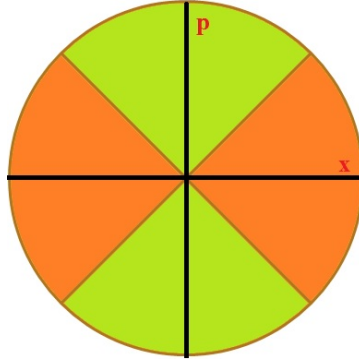
$$\theta = \left(\frac{1}{2} + k \right) \frac{\pi}{2}. \quad (4.21)$$

De plus, puisque l'on considère deux états comprimés conjugués dans notre problème, la caractérisation de la phase peut se réduire à prendre θ dans le domaine $[0, \frac{\pi}{2}]$. Dès lors, on a que :

$$\begin{aligned} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} &\Rightarrow \Delta^2 \hat{x}'_{2\xi} \leq \Delta^2 \hat{x}'_{1\xi}, \\ \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} &\Rightarrow \Delta^2 \hat{x}'_{1\xi} \leq \Delta^2 \hat{x}'_{2\xi}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Les conditions ci-dessus nous définissent les zones de choix de paire d'opérateurs de quadratures optimales. Celles-ci divisent l'espace des phases en deux zones comme on peut le voir sur la figure 4.3. Notons que les conditions

Figure 4.3: Zones d'optimalité de mesure des paires de quadratures



Pour $r > 0$, on choisira de mesurer la paire de variables $(\hat{x}'_{2\xi}, \hat{p}'_{1\xi})$ si θ se trouve dans la zone orange et de mesurer la paire de variables $(\hat{x}'_{1\xi}, \hat{p}'_{2\xi})$ si θ prend sa valeur dans la zone verte.

(4.22) pour le choix d'une paire d'opérateurs à mesurer dépendent de θ . De plus, on suppose r positif. S'il est négatif, il suffit d'inverser les inégalités entre les variances dans (4.22).

4.2 Amélioration de la Mesure des Quadratures

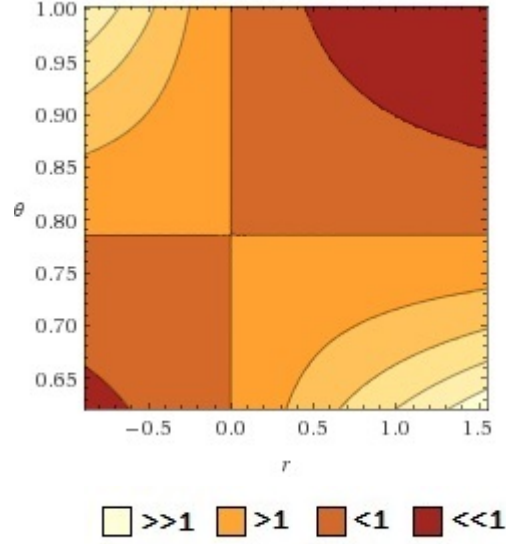
On peut maintenant comparer les variances que l'on a trouvées avec les variances standards pour une mesure individuelle de deux états comprimés.

Pour cela, on va considérer les rapports des variances suivants :

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta^2 \hat{x}'_{1\xi}}{\Delta^2 \hat{x}_\xi} &= \frac{e^{2r \cos(2\theta)} \cosh(2r \sin(2\theta))}{e^{2r \sin^2(\theta)} + e^{-2r \cos^2(\theta)}} , \\
\frac{\Delta^2 \hat{x}'_{1\xi}}{\Delta^2 \hat{p}_\xi} &= \frac{e^{2r \cos(2\theta)} \cosh(2r \sin(2\theta))}{e^{-2r \sin^2(\theta)} + e^{2r \cos^2(\theta)}} , \\
\frac{\Delta^2 \hat{x}'_{2\xi}}{\Delta^2 \hat{x}_\xi} &= \frac{e^{-2r \cos(2\theta)} \cosh(2r \sin(2\theta))}{e^{2r \sin^2(\theta)} + e^{-2r \cos^2(\theta)}} , \\
\frac{\Delta^2 \hat{x}'_{2\xi}}{\Delta^2 \hat{p}_\xi} &= \frac{e^{-2r \cos(2\theta)} \cosh(2r \sin(2\theta))}{e^{-2r \sin^2(\theta)} + e^{2r \cos^2(\theta)}} ,
\end{aligned} \tag{4.23}$$

que l'on labellera (1), (2), (3) et (4) de haut en bas. Les graphes correspondants à ces rapports entre la variance améliorée et la variance standard sont représentés sur les figures 4.4, 4.5, 4.6 et 4.7 respectivement. Ces figures montrent que les variances des deux modes après le passage dans le diviseur de faisceau sont optimales si la quadrature est mesurée dans sa zone d'optimalité.

Figure 4.4: Représentation graphique du rapport de variances (4.23.1)

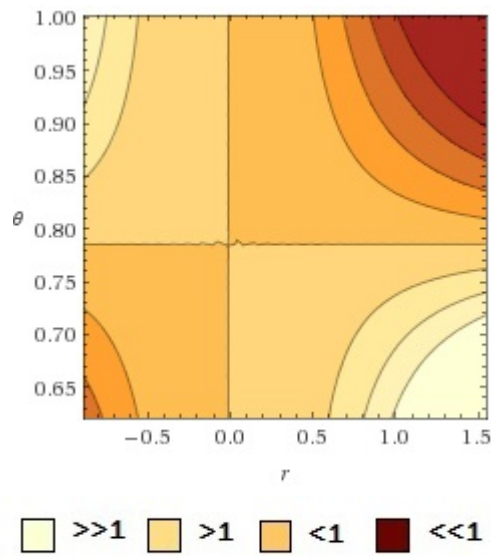


Les zones de couleur ocre foncé correspondent à des valeurs inférieures à 1 et les zones de couleur orange jusqu'à blanc correspondent à des valeurs supérieures à 1. Les droites $r = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$ sont toutes les deux de valeur 1. Dans sa zone d'optimalité, la variance associée à la mesure de $\hat{x}'_{1\xi}$ est plus petite que la variance associée à une mesure standard individuelle.

Le résultat général est le suivant: si on choisit correctement la paire de quadratures à mesurer, notre mesure améliorera toujours la mesure individuelle standard d'états comprimés. Il est donc avantageux de considérer deux états comprimés conjugués et de les passer dans un diviseur de faisceau avant d'effectuer une mesure sur les quadratures.

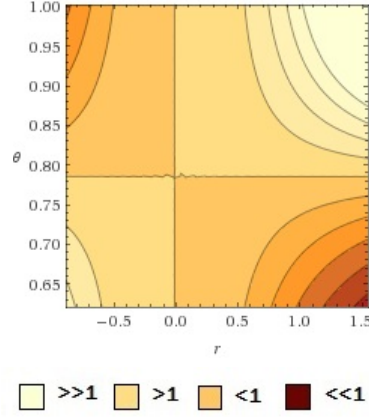
La seule difficulté est que pour déterminer quelle paire d'opérateur choisir pour effectuer la mesure, il faut d'abord avoir une estimation de θ . En effet, selon la zone dans laquelle se trouve θ , on choisira l'une ou l'autre paire d'opérateurs pour mesurer les quadratures. Ceci nécessite une information supplémentaire sur θ avant d'effectuer la procédure. Cette information peut s'obtenir soit en effectuant une mesure d'estimation de θ sur un état identique, soit elle doit nous être communiquée par un tiers.

Figure 4.5: Représentation graphique du rapport de variances (4.23.2)



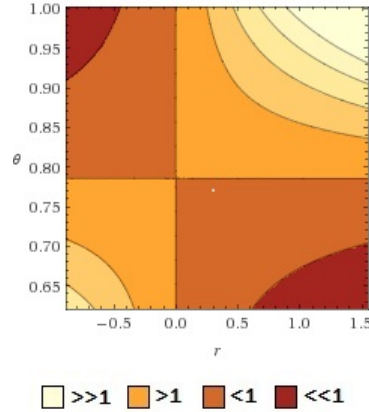
Les zones de couleur orange foncé correspondent à des valeurs inférieures à 1 et les zones de couleur beige clair jusqu'à blanc correspondent à des valeurs supérieures à 1. Les droites $r = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$ sont toutes les deux de valeur 1. Dans sa zone d'optimalité, la variance associée à la mesure de $\hat{p}'_{2\xi}$ est plus petite que la variance associée à une mesure standard individuelle.

Figure 4.6: Représentation graphique du rapport de variances (4.23.3)



Les zones de couleur orange foncé correspondent à des valeurs inférieures à 1 et les zones de couleur beige clair jusqu'à blanc correspondent à des valeurs supérieures à 1. Les droites $r = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$ sont toutes les deux de valeur 1. Dans sa zone d'optimalité, la variance associée à la mesure de $\hat{x}'_{2\xi}$ est plus petite que la variance associée à une mesure standard individuelle.

Figure 4.7: Représentation graphique du rapport de variances (4.23.4)



Les zones de couleur ocre foncé correspondent à des valeurs inférieures à 1 et les zones de couleur orange jusqu'à blanc correspondent à des valeurs supérieures à 1. Les droites $r = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$ sont toutes les deux de valeur 1. Dans sa zone d'optimalité, la variance associée à la mesure de $\hat{p}'_{1\xi}$ est plus petite que la variance associée à une mesure standard individuelle.

4.3 Corrélations et Détermination de la Phase

La *phase* de notre état comprimé correspond dans notre cas à l'angle de compression θ . Nous allons utiliser les informations que l'on a sur la mesure des quadratures pour déterminer cette phase. Pour cela nous allons utiliser les corrélations qui existent entre les deux modes à la sortie du diviseur de faisceau.

En calculant les covariances des paires de variables relevantes du point de vue de la mesure, on obtient les corrélations qui existent entre ces variables. Pour calculer ces covariances, on commence par déterminer les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned}\hat{x}'_{1\xi}\hat{p}'_{2\xi} &= \frac{e^{2r\cos(2\theta)}}{4} \left[e^{2r\sin(2\theta)}(\hat{x}'_1 + \hat{p}'_2)^2 - e^{-2r\sin(2\theta)}(\hat{x}'_1 - \hat{p}'_2)^2 \right], \\ \hat{x}'_{2\xi}\hat{p}'_{1\xi} &= \frac{e^{-2r\cos(2\theta)}}{4} \left[e^{2r\sin(2\theta)}(\hat{x}'_2 + \hat{p}'_1)^2 - e^{-2r\sin(2\theta)}(\hat{x}'_2 - \hat{p}'_1)^2 \right].\end{aligned}\tag{4.24}$$

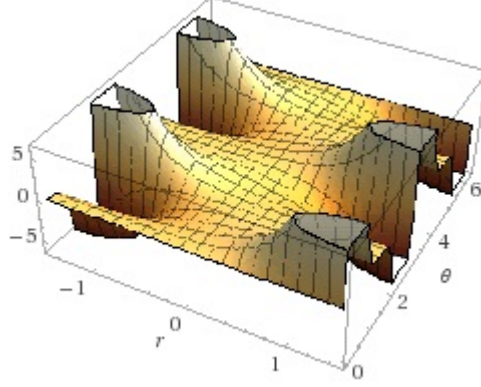
En développant les termes au carré, en contractant à gauche et à droite par l'état du vide $|0\rangle^{\otimes 2}$ et sachant que $\langle 0|\hat{x}_1'^2|0\rangle = \langle 0|\hat{x}_2'^2|0\rangle = \langle 0|\hat{p}_1'^2|0\rangle = \langle 0|\hat{p}_2'^2|0\rangle = \frac{1}{2}$, on peut calculer explicitement les covariances qui rendent compte des corrélations entre les paires d'opérateurs mesurés. Ces covariances sont données par:

$$\begin{aligned}\langle \hat{x}'_{1\xi}\hat{p}'_{2\xi} \rangle &= \frac{e^{2r\cos(2\theta)}}{2} \sinh(2r\sin(2\theta)), \\ \langle \hat{x}'_{2\xi}\hat{p}'_{1\xi} \rangle &= \frac{e^{-2r\cos(2\theta)}}{2} \sinh(2r\sin(2\theta)).\end{aligned}$$

(4.25)

Il est intéressant ici de constater que des variables dans des modes différents à la sortie du diviseur de faisceau possèdent des corrélations pour $r \neq 0$. En effet, $r = 0$ correspond à un état non-comprimé, il reste donc tout à fait symétrique sous les rotations dans l'espace des phases optique et il ne doit donc avoir aucune corrélation entre les positions et les impulsions. Ces corrélations sont représentée graphiquement sur la Figure 4.8.

Il faut noter que ces corrélations sont dues au fait que l'on fait une mesure jointe sur notre état. En effet, si l'on fait des mesures individuelles sur nos états comprimés de départ en mesurant la position sur le mode 1 et l'impulsion sur le mode 2, il n'existera pas de corrélations entre ces mesures puisque les opérateurs $\hat{x}_{1\xi}$ et $\hat{p}_{2\xi}$ commutent. De nouveau, la mesure jointe nous donne de l'information que l'on aurait pas pu obtenir avec des mesures individuelles.

Figure 4.8: Représentation graphique des corrélations entre $x'_{1\xi}$ et $p'_{2\xi}$ 

Corrélation entre les mesures de $\hat{x}'_{1\xi}$ et $\hat{p}'_{2\xi}$. Les corrélations pour $\hat{x}'_{2\xi}$ et $\hat{p}'_{1\xi}$ sont similaires en prenant $r \rightarrow -r$. Ces corrélations s'annulent pour $r = 0$ comme attendu.

On peut simplifier l'expression des covariances (4.25) en prenant r proche de zéro ou beaucoup plus grand que 1. Ceci est possible puisque r est un paramètre contrôlable du système étudié. Pour $0 < r \ll 1$, les covariances deviennent :

$$\langle \hat{x}'_{1\xi} \hat{p}'_{2\xi} \rangle \simeq r \sin(2\theta), \quad (4.26)$$

$$\langle \hat{x}'_{2\xi} \hat{p}'_{1\xi} \rangle \simeq r \sin(2\theta).$$

Il est intéressant de remarquer que pour r proche de zéro, les corrélations entre les paires d'opérateurs corrélés sont les mêmes au premier ordre en r . Pour $r \gg 1$ et $\theta \leq \frac{\pi}{4}$ les covariances sont ¹ :

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}'_{1\xi} \hat{p}'_{2\xi} \rangle &\simeq \frac{e^{2\sqrt{2}r \sin(2\theta + \frac{\pi}{4})}}{4}, \\ \langle \hat{x}'_{2\xi} \hat{p}'_{1\xi} \rangle &\simeq \frac{e^{2r \sin(2\theta)}}{4}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Les expressions (4.26) et (4.27) sont beaucoup plus simples à manipuler que l'expression générale (4.25) des covariances. On peut facilement les inverser et exprimer θ en fonction de la covariance. On peut déterminer ces corrélations expérimentalement et en déduire une estimation de θ grâce aux

¹Si $\frac{\pi}{4} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ou si $r \ll -1$, alors il faut échanger l'indice 1 et 2 dans les expressions de (4.27).

équations (4.26) ou (4.27), selon le signe et la valeur de r . Remarquons que si r est petit, le choix de la paire de quadratures à mesurer n'a *a priori* pas d'importance puisque pour $0 < r \ll 1$, on a que $\langle \hat{x}'_{1\xi} \hat{p}'_{2\xi} \rangle = \langle \hat{x}'_{2\xi} \hat{p}'_{1\xi} \rangle$.

On a donc un moyen de calculer l'angle θ en termes des corrélations statistiques entre les opérateurs que l'on a mesurés après le passage dans le diviseur de faisceau.

Remarquons que les corrélations entre les autres variables sont toutes nulles de sorte que la matrice de covariance après le diviseur de faisceau s'écrit sous la forme :

$$\sigma'_\xi = \begin{pmatrix} \Delta^2 x'_{1\xi} & 0 & 0 & \langle \hat{x}'_{1\xi} \hat{p}'_{2\xi} \rangle \\ 0 & \Delta^2 p'_{1\xi} & \langle \hat{x}'_{2\xi} \hat{p}'_{1\xi} \rangle & 0 \\ 0 & \langle \hat{x}'_{2\xi} \hat{p}'_{1\xi} \rangle & \Delta^2 x'_{2\xi} & 0 \\ \langle \hat{x}'_{1\xi} \hat{p}'_{2\xi} \rangle & 0 & 0 & \Delta^2 p'_{2\xi} \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

En calculant le déterminant de cette matrice, en remplaçant les variances et covariances par leurs expressions et en utilisant les propriétés des fonctions hyperboliques, on trouve que :

$$\det \sigma'_\xi = \frac{1}{4}, \quad (4.29)$$

tout comme pour (2.44).

On peut bloc-diagonaliser la matrice (4.28) en adoptant l'écriture en terme du vecteur $\hat{\mathbf{r}}'_\xi = (\hat{x}'_{1\xi}, \hat{p}'_{2\xi}, \hat{x}'_{2\xi}, \hat{p}'_{1\xi})^T$ au lieu du vecteur $\hat{\mathbf{r}}_\xi = (\hat{x}'_{1\xi}, \hat{p}'_{1\xi}, \hat{x}'_{2\xi}, \hat{p}'_{2\xi})^T$. La matrice de covariance (4.28) se réécrit alors comme:

$$\sigma'_\xi = \begin{pmatrix} \Delta^2 x'_{1\xi} & \langle \hat{x}'_{1\xi} \hat{p}'_{2\xi} \rangle & 0 & 0 \\ \langle \hat{x}'_{1\xi} \hat{p}'_{2\xi} \rangle & \Delta^2 p'_{2\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta^2 x'_{2\xi} & \langle \hat{x}'_{2\xi} \hat{p}'_{1\xi} \rangle \\ 0 & 0 & \langle \hat{x}'_{2\xi} \hat{p}'_{1\xi} \rangle & \Delta^2 p'_{1\xi} \end{pmatrix}, \quad (4.30)$$

où, comme on l'a vu dans l'équation (4.18): $\Delta^2 x'_{1\xi} = \Delta^2 p'_{2\xi}$ et $\Delta^2 x'_{2\xi} = \Delta^2 p'_{1\xi}$. On voit que les opérateurs appartenant à des paires différentes d'opérateurs corrélés sont indépendants les uns des autres. On peut donc traiter chacune de ses paires indépendamment c'est-à-dire comme deux pseudo-modes indépendants. Les matrices de covariance pour chacun de ces pseudo-modes sont:

$$\sigma'_{1'\xi} = \begin{pmatrix} \Delta^2 x'_{1\xi} & \langle \hat{x}'_{1\xi} \hat{p}'_{2\xi} \rangle \\ \langle \hat{x}'_{1\xi} \hat{p}'_{2\xi} \rangle & \Delta^2 p'_{2\xi} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma'_{2'\xi} = \begin{pmatrix} \Delta^2 x'_{2\xi} & \langle \hat{x}'_{2\xi} \hat{p}'_{1\xi} \rangle \\ \langle \hat{x}'_{2\xi} \hat{p}'_{1\xi} \rangle & \Delta^2 p'_{1\xi} \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

Le déterminant de chacune de ces matrices est :

$$\det \sigma'_{1'\xi} = \frac{e^{4r \cos(2\theta)}}{4} \quad \text{et} \quad \det \sigma'_{2'\xi} = \frac{e^{-4r \cos(2\theta)}}{4} . \quad (4.32)$$

Les matrices inverses sont donc:

$$\sigma'^{-1}_{1'\xi} = 4 \begin{pmatrix} \Delta^2 x'_{2\xi} & -\langle \hat{x}'_{2\xi} \hat{p}'_{1\xi} \rangle \\ -\langle \hat{x}'_{2\xi} \hat{p}'_{1\xi} \rangle & \Delta^2 x'_{2\xi} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma'^{-1}_{2'\xi} = 4 \begin{pmatrix} \Delta^2 x'_{1\xi} & -\langle \hat{x}'_{1\xi} \hat{p}'_{2\xi} \rangle \\ -\langle \hat{x}'_{1\xi} \hat{p}'_{2\xi} \rangle & \Delta^2 x'_{1\xi} \end{pmatrix} . \quad (4.33)$$

Remarquons le changement d'indices dans les matrices inverses. En effet, si on calcule l'élément 1 1 de la matrice inverse de $\sigma'_{1'\xi}$, on a:

$$\frac{\Delta^2 x'_{1\xi}}{\det \sigma'_{1'\xi}} = \frac{2 e^{2r \cos(2\theta)} \cosh(2r \sin(2\theta))}{e^{4r \cos(2\theta)}} = 2 e^{-2r \cos(2\theta)} \cosh(2r \sin(2\theta)) = 4 \Delta^2 x'_{2\xi}, \quad (4.34)$$

et il en est de même pour toutes les autres composantes : l'indice est changé et l'élément est multiplié par 4. Ces deux pseudo-modes possèdent chacun leur propre fonction de Wigner donnée d'après (2.14). Puisque les opérateurs de ces pseudo-modes commutent, ces fonctions de Wigner sont en fait des fonctions de densité de probabilités. Ces fonctions de Wigner s'écrivent comme:

$$W'_{1'\xi} = \frac{1}{\pi e^{2r \cos(2\theta)}} e^{[-2\Delta^2 x'_{2\xi}(x^2+p^2) + 4\langle \hat{x}'_{2\xi} \hat{p}'_{1\xi} \rangle xp]}, \quad (4.35)$$

$$W'_{2'\xi} = \frac{1}{\pi e^{-2r \cos(2\theta)}} e^{[-2\Delta^2 x'_{1\xi}(x^2+p^2) + 4\langle \hat{x}'_{1\xi} \hat{p}'_{2\xi} \rangle xp]}.$$

Ces deux pseudo-modes étant indépendants, la fonction de Wigner générale s'écrit simplement comme le produit des fonctions de Wigner de chacun des pseudo-modes:

$$W'_\xi = W'_{1'\xi} \cdot W'_{2'\xi}. \quad (4.36)$$

C'est la fonction de Wigner du système de deux états comprimés conjugués après le passage dans le diviseur de faisceau.

4.4 Erreur sur les Corrélations

Afin de calculer l'angle moyen $\langle \theta \rangle$ et sa variance on peut utiliser les fonctions de Wigner (4.36) des paires de variables mesurées. La valeur moyenne de θ est alors donnée, conformément à (2.10), par :

$$\langle \theta \rangle = \iint dx dp \theta W'_\xi(x, p), \quad (4.37)$$

et la variance par:

$$\Delta^2\theta = \iint dx dp (\theta - \langle\theta\rangle)^2 W'_\xi(x, p), \quad (4.38)$$

où θ est donnée en termes des variables x et p par:

$$\theta = \arctan\left(\frac{x}{p}\right). \quad (4.39)$$

On sait cependant qu'il faut être prudent en utilisant cette expression de θ pour en déduire des résultats statistiques (voir section 2.4). En effet, la fonction $\arctan\left(\frac{x}{p}\right)$ n'est pas une fonction polynomiale en x et p . Dès lors, (4.37) et (4.38) donnent des résultats non-physiques. De plus, θ est une variable circulaire et doit donc être traitée conformément à la statistique circulaire, ce qui n'est pas le cas ici.

Il nous faut donc calculer les intégrales suivantes :

$$\langle\theta\rangle = \iint dx dp \arctan\left(\frac{x}{p}\right) W'_\xi(x, p) \quad \text{et} \quad \langle\theta^2\rangle = \iint dx dp \arctan^2\left(\frac{x}{p}\right) W'_\xi(x, p) \quad (4.40)$$

en utilisant l'expression (4.36) pour W'_ξ . On calcule ces intégrales avec le programme *Mathematica*. Comme on l'avait annoncé et après calcul, on a remarqué que cette procédure ne donne pas de valeur physique acceptable pour $\langle\theta\rangle$ et $\Delta^2\theta$. Dès lors, on va se concentrer sur la mesure des corrélations entre les quadratures.

On peut déterminer l'erreur sur les corrélations en calculant :

$$\Delta^2 \hat{x}'_{1\xi} \hat{p}'_{2\xi} = \langle (\hat{x}'_{1\xi} \hat{p}'_{2\xi})^2 \rangle - \langle \hat{x}'_{1\xi} \hat{p}'_{2\xi} \rangle^2. \quad (4.41)$$

Dès lors, en calculant les deux termes intervenant dans la variance de la corrélation, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle (\hat{x}'_{1\xi} \hat{p}'_{2\xi})^2 \rangle &= \frac{e^{4r \cos(2\theta)}}{8} [3 \cosh(4r \sin(2\theta)) - 1] \\ \langle \hat{x}'_{1\xi} \hat{p}'_{2\xi} \rangle^2 &= \frac{e^{4r \cos(2\theta)}}{8} [\cosh(4r \sin(2\theta)) - 1] \end{aligned} \quad (4.42)$$

On obtient donc finalement pour la variance de la corrélation :

$$\Delta^2 \hat{x}'_{1\xi} \hat{p}'_{2\xi} = \frac{e^{4r \cos(2\theta)}}{4} [\cosh(4r \sin(2\theta))]. \quad (4.43)$$

De même, on obtient la variance sur les corrélations sur la deuxième paire de variables :

$$\Delta^2 \hat{x}'_{2\xi} \hat{p}'_{1\xi} = \frac{e^{-4r \cos(2\theta)}}{4} [\cosh(4r \sin(2\theta))]. \quad (4.44)$$

On doit encore déterminer l'erreur sur les corrélations lorsque l'on effectue une mesure individuelle sur seulement un mode comprimé afin de pouvoir la comparer au résultat ci-dessus. Les corrélations pour un état comprimé étant données par $\frac{1}{2} \langle \hat{x}_\xi \hat{p}_\xi + \hat{p}_\xi \hat{x}_\xi \rangle$, la variance associée est donnée par:

$$\Delta^2_{\hat{x}_\xi \hat{p}_\xi} = \frac{1}{4} (\langle (\hat{x}_\xi \hat{p}_\xi + \hat{p}_\xi \hat{x}_\xi)^2 \rangle - \langle \hat{x}_\xi \hat{p}_\xi + \hat{p}_\xi \hat{x}_\xi \rangle^2). \quad (4.45)$$

Après de long et fastidieux calculs, on obtient finalement l'expression suivante pour cette variance:

$$\Delta^2_{\hat{x}_\xi \hat{p}_\xi} = \sinh^2(2r) \sin^2(2\theta) + \frac{1}{2}. \quad (4.46)$$

Rappelons les principaux résultats obtenus jusqu'à présent. Tout d'abord on a trouvé une expression analytique pour les corrélations de la mesure des quadratures d'un état comprimé individuel (2.42) et des corrélations des paires de quadratures mesurées à la sortie du diviseur de faisceau (4.25) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle \hat{x}_\xi \hat{p}_\xi + \hat{p}_\xi \hat{x}_\xi \rangle &= -\frac{1}{2} \sin(2\theta) \sinh(2r), \\ \langle \hat{x}'_{1\xi} \hat{p}'_{2\xi} \rangle &= \frac{e^{2r \cos(2\theta)}}{2} \sinh(2r \sin(2\theta)), \\ \langle \hat{x}'_{2\xi} \hat{p}'_{1\xi} \rangle &= \frac{e^{-2r \cos(2\theta)}}{2} \sinh(2r \sin(2\theta)). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Nous venons de déterminer les variances sur ces corrélations c'est-à-dire l'erreur avec laquelle on mesure ces corrélations. Ces variances de corrélations sont résumées ci-dessous:

$$\begin{aligned} \Delta^2_{\hat{x}_\xi \hat{p}_\xi} &= \sinh^2(2r) \sin^2(2\theta) + \frac{1}{2}, \\ \Delta^2_{\hat{x}'_{1\xi} \hat{p}'_{2\xi}} &= \frac{e^{4r \cos(2\theta)}}{4} [\cosh(4r \sin(2\theta))], \\ \Delta^2_{\hat{x}'_{2\xi} \hat{p}'_{1\xi}} &= \frac{e^{-4r \cos(2\theta)}}{4} [\cosh(4r \sin(2\theta))]. \end{aligned} \quad (4.48)$$

On peut maintenant comparer les corrélations entre les quadratures et leurs variances dans le cas d'une mesure individuelle d'un état comprimé et dans

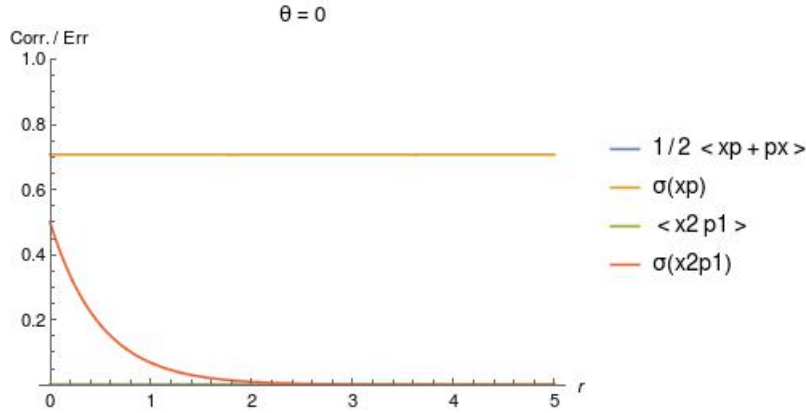
le cas d'une mesure globale sur le système composé de deux états comprimés conjugués l'un par rapport à l'autre.

Par souci de clarté, on présente nos résultats sous la forme de graphes sur lesquels il sera plus aisé de comparer les comportements des corrélations et de leurs variances pour les deux techniques de mesure (individuelle et globale).

4.4.1 Cas sans corrélations

Pour un angle de compression $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, nos états initiaux sont comprimés selon l'axe des impulsions ou des positions. Les deux états conjugués sont alors identiques. La symétrie particulière pour ces angles annule les corrélations entre les quadratures de ces états. Leurs matrices de covariances sont donc diagonales. La variance sur la mesure individuelle des corrélations est $\Delta_{xp}^2 = \frac{1}{2}$ quelle que soit la valeur du facteur de compression r . Cependant, pour une mesure globale, en choisissant la paire $\hat{x}'_{2\xi}\hat{p}'_{1\xi}$,

Figure 4.9: Ecart-type des covariances entre mesures individuelle et globale.



Pour le cas sans corrélations ($\theta = 0$), on voit que l'écart-type des corrélations d'une mesure individuelle d'un état comprimé est constant et vaut $\frac{1}{\sqrt{2}}$ alors que pour notre mesure globale, l'écart-type des corrélations décroît exponentiellement avec le facteur de compression r .

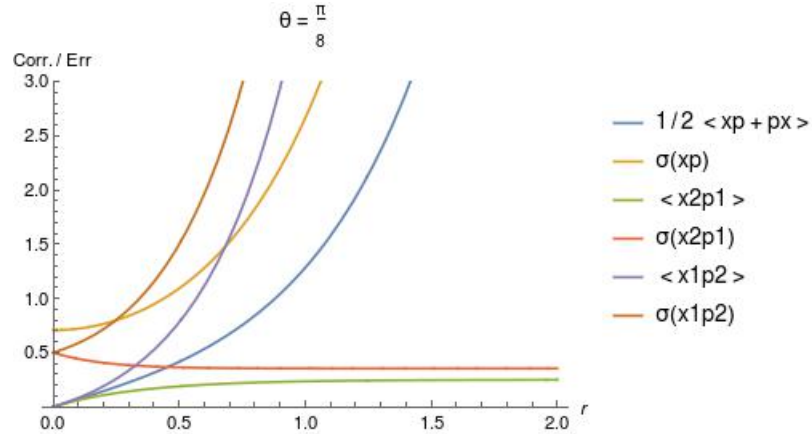
la variance sur les corrélations diminue avec r d'après $\Delta_{\hat{x}'_{2\xi}\hat{p}'_{1\xi}}^2 = \frac{e^{-4r}}{4}$ en prenant r positif. Cette variance sera donc toujours plus petite que la variance pour une mesure individuelle. La mesure globale de corrélations nulles

est donc bien meilleure que pour une mesure individuelle. La comparaison de ces erreurs est représentée sur la Figure 4.9.

4.4.2 Cas d'un angle intermédiaire

Pour un angle de compression θ compris entre 0 et $\frac{\pi}{4}$ ou entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$, le comportement général des mesures de corrélations entre les quadratures a une forme similaire à celle représentée sur la Figure 4.10 où l'on a pris le cas particulier de $\theta = \frac{\pi}{8}$. Les variances sur les corrélations des mesures globales sont soit plus petites, soit plus grandes que la variance sur les corrélations d'une mesure individuelle selon la paire de quadratures indépendantes que l'on a choisit de mesurer. La paire dite optimale est celle qui donne la plus petite variance mais c'est également celle pour laquelle les corrélations sont les plus faibles. Dans tous les cas, les écart-types sont toujours supérieurs aux corrélations auxquelles ils sont associés comme on peut le voir sur la Figure 4.10.

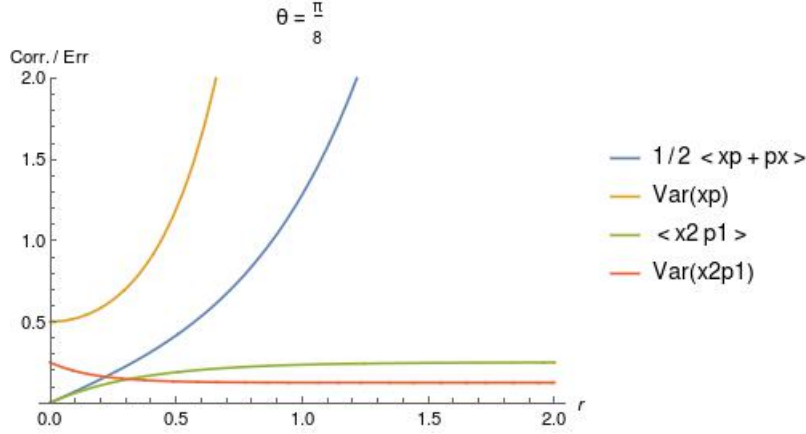
Figure 4.10: Comparaison des corrélations avec leurs écart-types pour différents schémas de mesure.



Le cas d'un angle $\theta = \frac{\pi}{8}$ possède une allure typique. Les corrélations des paires de variables indépendantes possèdent des corrélations et un écart-type très grand pour l'une et très petits pour l'autre paire. L'écart-type étant toujours supérieur aux corrélations.

Cependant, la variance de la paire "optimale", devient inférieure aux corrélations pour un facteur de compression $r \gtrsim 0.35$ comme on peut le voir sur la Figure 4.11.

Figure 4.11: Comparaison des corrélations avec leurs variances pour une mesure individuelle et globale



Pour $\theta = \frac{\pi}{8}$, la paire de quadratures $\hat{x}'_{2\xi}\hat{p}'_{1\xi}$ donne la meilleure mesure. En effet, les corrélations sont faibles mais la variance de ces corrélations devient inférieure à celles-ci pour $r \gtrsim 0.35$. Pour une mesure individuelle, la variance est toujours supérieure aux corrélations.

Malgré que l'écart-type des corrélations reste toujours supérieure aux corrélations, on peut identifier une amélioration en regardant les erreurs relatives des deux types de mesures. L'écart-type étant défini par $\sigma_{xp} = \Delta_{xp}$, les erreurs relatives que l'on indique par la lettre grecque δ sont données par:

$$\delta_{xp} = \frac{\Delta_{xp}}{\langle xp \rangle}, \quad (4.49)$$

$$\delta_{x_{a\xi}p_{b\xi}} = \frac{\Delta_{x_{a\xi}p_{b\xi}}}{\langle x_{a\xi}p_{b\xi} \rangle},$$

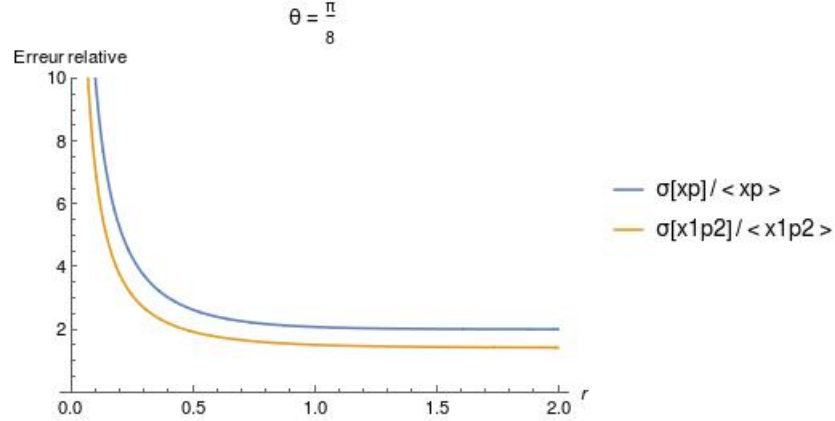
où $a, b = 1, 2$ désignent les deux modes à la sortie du diviseur de faisceau et où on a utilisé la notation condensée $\langle xp \rangle$ pour désigner $\frac{1}{2}\langle xp + px \rangle$.

Comme on peut le voir sur la Figure 4.12, l'erreur relative sur les corrélations de la mesure globale est toujours plus petite que l'erreur relative de la mesure individuelle pour un angle de $\theta = \frac{\pi}{8}$.

4.4.3 Cas symétrique de $\theta = \frac{\pi}{4}$

Pour un angle de compression $\theta = \frac{\pi}{4}$, notre système de départ est plus symétrique. Le choix de la paire de quadratures à mesurer après le diviseur

Figure 4.12: Comparaison des erreurs relatives pour une mesure individuelle et globale



L'erreur relative d'une mesure globale est la même quelle que soit la paire de variables $\hat{x}'_{2\xi}\hat{p}'_{1\xi}$ ou $\hat{x}'_{1\xi}\hat{p}'_{2\xi}$ que l'on mesure. L'erreur relative d'une mesure globale est toujours inférieure à celle d'une mesure individuelle.

de faisceau n'a plus d'importance étant donné que chaque paire donne toutes deux lieu aux mêmes corrélations et variances pour cet angle particulier. De plus, les corrélations de la mesure globale sont exactement les mêmes que pour une mesure indépendante. Cependant, comme on peut le voir sur la Figure 4.13, la variance sur les corrélations est toujours inférieure pour la mesure globale que pour la mesure individuelle.

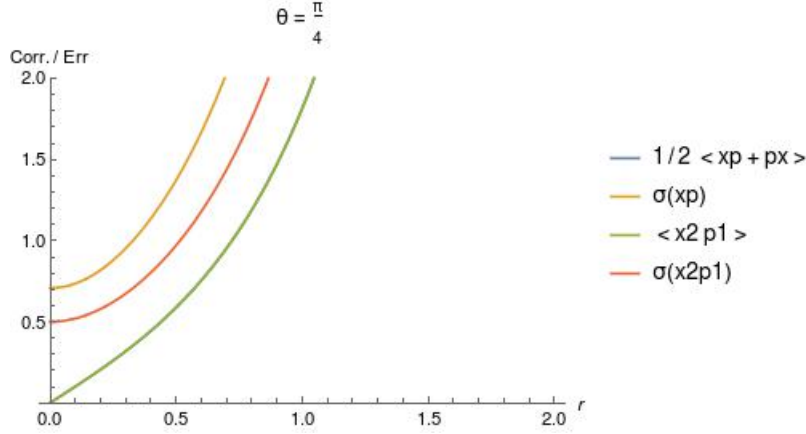
Si on compare les variances relatives, on observe un comportement similaire au cas d'un angle de compression $\theta = \frac{\pi}{8}$. En effet, l'erreur relative de la mesure globale des corrélations est inférieure à l'erreur relative de la mesure individuelle. Il semble donc qu'il existe une amélioration générale de la mesure globale par rapport à la mesure individuelle. C'est ce que nous analysons ci-dessous.

4.4.4 Comparaison des erreurs relatives

On peut prendre le rapport des erreurs relatives et étudier son comportement pour différents angles de compression θ . La Figure 4.15 donne le rapport entre les erreurs relatives δ_{xp} et $\delta_{x_{2\xi}p_{1\xi}}$ en fonction du facteur de compression r à différents angles situés dans la zone d'optimalité de la paire $x_{2\xi}p_{1\xi}$.

On remarque que pour r grand, tous les rapports convergent vers une

Figure 4.13: Comparaison des corrélations et de leurs écarts-types pour une mesure individuelle et globale



A l'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$, les corrélations sont les mêmes pour une mesure globale ou individuelle. Ceci est dû à la symétrie particulière de ce cas de figure. Cependant l'écart-type de la mesure globale est toujours plus petite que l'écart-type de la mesure individuelle.

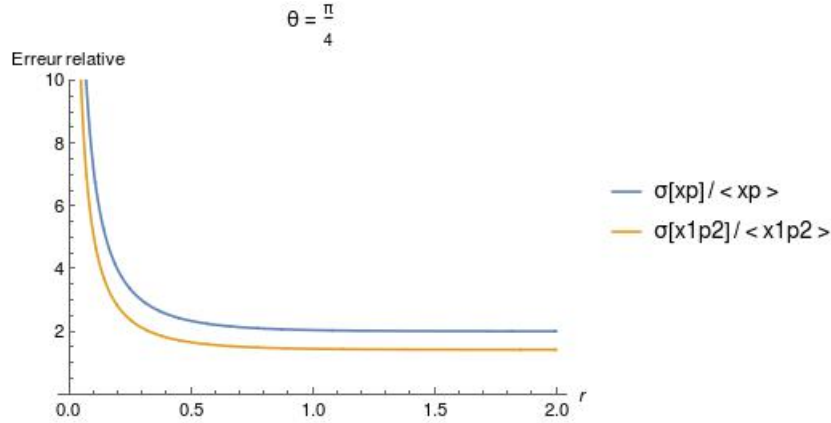
constante excepté pour $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ pour lesquels ce rapport diverge étant donné que les corrélations entre les quadratures s'annulent pour ces angles particuliers. Pour $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, on a que :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\delta_{x_{2\xi} p_{1\xi}}}{\delta_{x_\xi p_\xi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1. \quad (4.50)$$

On améliore donc notre mesure des corrélations d'un facteur $\sqrt{2}$. Remarquons que dans le cas des états cohérents déplacé et conjugués, N. Cerf et S. Iblisdir avaient trouvé un facteur d'amélioration similaire pour les écarts-types des mesures globales des quadratures.

On peut interpréter les résultats montrés sur la Figure 4.15. On remarque qu'un écart par rapport à la valeur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ apparaît pour des angles θ différents de $\frac{\pi}{4}$. Cet écart devient de plus en plus grand à mesure que θ s'approche de 0, c'est-à-dire que les corrélations entre les quadratures de l'état comprimé diminuent. Le maximum des rapports des erreurs relatives se déplace vers des valeurs du facteur de compression r de plus en plus grand dès que θ s'éloigne de $\frac{\pi}{4}$. Les corrélations étant de plus en plus faibles à mesure que l'angle de compression s'approche de 0 (ou identique-

Figure 4.14: Comparaison des erreurs relatives pour une mesure individuelle et globale

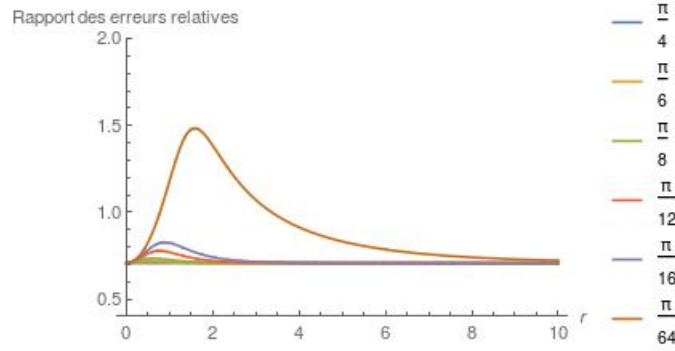


A l'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$, L'erreur relative d'une mesure globale est toujours plus petite que l'erreur relative d'une mesure individuelle des corrélations. Toutes deux tendent vers une constante pour un facteur de compression r grand.

ment de $\frac{\pi}{2}$), il faut que le facteur de compression r devienne de plus en plus grand c'est-à-dire que les états sont de plus en plus comprimés pour pouvoir déterminer les corrélations efficacement. Cependant, pour un angle de compression raisonnablement lointain de 0 et de $\frac{\pi}{2}$, un facteur de compression r de 4 ou 5 suffit amplement pour observer une amélioration de la mesure globale des corrélations par rapport à une mesure individuelle.

Remarquons finalement que pour la limite $r \rightarrow 0$, le rapport des erreurs relatives sur les corrélations vaut également $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Cependant, si le facteur de compression est strictement égal à zéro, il n'y a pas de compression de l'état et celui-ci reste l'état du vide dans notre cas. De plus, deux états du vide identiques passés dans un diviseur de faisceau restent deux états du vide identiques sans intrication, il ne doit donc pas y avoir de différence entre notre schéma de mesure et une mesure individuelle. Il y a donc une discontinuité dans nos résultats pour un facteur de compression nul. De plus, pour un facteur de compression nul, il n'y a pas de corrélations entre les quadratures puisque l'état est tout à fait symétrique. Regarder le comportement du rapport des erreurs relatives en $r = 0$ n'a donc pas de sens réel. La discontinuité discutée ci-dessous apparaît également dans [37] pour la limite du facteur de déplacement $\alpha \rightarrow 0$. En effet, pour un facteur de déplacement α petit mais non nul, il existe une amélioration de la variances des quadra-

Figure 4.15: Comparaison des rapports des erreurs relatives pour une mesure individuelle et globale à différents angles.



On compare l'erreur relative d'une mesure globale et l'erreur relative d'une mesure individuelle en prenant leur rapport. Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, ce rapport vaut exactement $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Pour les autres angles, le rapport des erreurs relatives atteint cette valeur à grand facteur de compression r sauf pour $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ pour lesquels il y a une divergence dû à l'annulation des corrélations entre les quadratures.

tures. Cependant, pour un α strictement nul, on retrouve des états du vide identiques qui sont tout à fait symétriques et il n'y a plus d'amélioration possible sur les variances des quadratures.

Conclusions et Perspectives

Ce travail m'a permis d'approfondir plusieurs notions de physique et d'obtenir quelques résultats.

Tout d'abord, il est bien connu que lorsque l'on envoie deux modes comprimés et conjugués différents dans un diviseur de faisceau, on obtient à la sortie de celui-ci deux modes intriqués. On peut identifier dans ces modes, des corrélations entre leurs quadratures. Il existe deux paires de quadratures corrélées. La position du premier mode à la sortie du diviseur de faisceau est corrélé à l'impulsion du deuxième mode et vice-versa. Ceci nous permet de mesurer indépendamment la position d'un mode et l'impulsion de l'autre puisqu'ils sont dans deux modes différents. On a donné une expression analytique de ces corrélations en fonction du facteur de compression r et de l'angle de compression θ . Ces relations peuvent être inversées pour déterminer l'angle de corrélation θ et donc la phase optique à partir des corrélations. On a également montré que la variance sur la mesure de ces quadratures est meilleure dans certains domaines de l'espace des phases qu'une mesure individuelle des quadratures sur un seul état comprimé. Ces domaines de l'espace des phases divisent celui-ci en deux *zones d'optimalité* dans lesquelles il est préférable de mesurer l'une ou l'autre paire de quadratures. Le choix de la paire de quadratures corrélées à mesurer optimalement dépend de l'angle de compression θ . On a également montré que, dans leurs zones d'optimalité, les variances des corrélations de paires de quadratures à deux modes améliorent la variance des corrélations des quadratures d'un seul mode comprimé. Si on sait dans quelle zone d'optimalité se trouve θ , on peut alors effectuer une mesure des corrélations qui améliore toute mesure individuelle d'un seul mode comprimé. Ces résultats confirment donc l'idée générale qu'une *mesure globale* d'un système (réalisée ici grâce à la conjugaison de phase et le passage dans le diviseur de faisceau) est meilleure qu'une *mesure individuelle* de chaque état du système. Ce principe avait déjà été démontré pour des systèmes de spins ainsi que pour des états cohérents. De plus, nos résultats montrent que la conjugaison de phase entre les deux

modes comprimés à l'entrée du diviseur de faisceau est importante. En effet, deux copies du même mode ne permettent pas d'obtenir des corrélations entre les deux modes de sortie du diviseur de faisceau. Cet effet de conjugaison de phase, inspiré sur base des résultats sur l'extraction d'information sur des spins antiparallèles, avait déjà été observé pour des états cohérents.

Concrètement, cette étude a permis de vérifier pour des états comprimés des principes permettant d'améliorer l'extraction d'information. De plus, elle constitue une démarche explicite pour mesurer les corrélations entre les quadratures de deux états quantiques comprimés et conjugués. On a montré que notre stratégie de mesure de ces corrélations était meilleure que pour une mesure individuelle de celles-ci. En effet, une mesure individuelle et simultanée des quadratures d'un mode comprimé est toujours limitée par le bruit quantique.

Cependant, aucune preuve d'optimalité de notre procédé n'est donnée. Cette preuve n'existe pas non plus pour deux états cohérents conjugués traités par [37]. Une telle preuve, si elle existe, permet de donner une borne sur l'information maximale que l'on peut extraire d'états quantiques Gaussiens ou de développer d'autres techniques de mesure avec de meilleurs résultats.

Un autre problème encore à traiter est celui où les deux états comprimés n'ont pas la même phase mais dont la bisectrice entre les deux phases ne coïncide pas avec l'axe des positions dans l'espace des phases. Leurs phases ne sont alors pas conjuguées mais il existe un référentiel (c'est-à-dire une phase de référence) dans lequel ces deux états apparaîtront conjugués. Ce schéma se manifeste pour des systèmes de mesure qui utilisent des états EPR et mesurent le déphasage de ceux-ci après interaction avec le milieu étudié.

Finalement, on a déterminé et calculé les variances sur les corrélations et montré que l'on peut déduire la phase optique avec ces corrélations. Cependant, on n'a pas donné d'expression explicite de l'erreur sur la phase. Ceci permettrait de comparer nos résultats avec d'autres techniques de mesure quantique de phase optique.

Cette étape peut servir de point de départ pour des études ultérieures sur la détermination de la phase optique basée sur les corrélations entre les quadratures d'états comprimés.

Bibliography

- [1] Oelker E. *et al.*, "Squeezed light for advanced gravitational wave detectors and beyond", Optics Express **22**, 17 21106-21121 (2014).
- [2] A. Einstein, "Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation", Preussische Akademie der Wissenschaften (Berlin) Sitzungsberichte, pg 688 (1916).
- [3] A. Einstein, "Über Gravitationswellen", Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), pg 154-167 (1918).
- [4] M. H. Anderson *et al.*, "Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor", Science, New Series, **269**, 5221 198-201 (1995).
- [5] C. Orzel *et al.*, "Squeezed States in a Bose-Einstein Condensate", Science **291**, 5512 2386-2389 (2001).
- [6] M. T. Johnsson *et al.*, "Squeezing in Bose-Einstein condensates with large numbers of atoms", New Journal of Physics 15 (2013) 123024.
- [7] S. Olivares, "Quantum optics in the phase space - A tutorial on Gaussian states", Eur. Phys. J. Special Topics **203**, 3-24 (2012)
- [8] M. C. Teich and B. E. A. Saleh, "Tutorial : Squeezed states of light", Quantum opt. **1**, 153 (1989).
- [9] C. Weedbrook et al. "Gaussian Quantum Information" Reviews of Modern Physics **84**, 2 621-669 (2012).
- [10] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, "Mécanique quantique 1", Hermann, nouveau tirage 1998, ISBN 2-7056-6074-7.
- [11] R. J. Glauber, "Coherent and incoherent states of the radiation field", Phys. Rev. 131 (6), 2766 (1963)

- [12] G. Adesso and F. Illuminati, "Entanglement in continuous variable system: recent advances and current perspectives", J. Phys. A **40**, 7821 (2007).
- [13] I. Novikova, College of William and Mary, Department of Physics, *Generation of squeezed vacuum in atomic ensembles*. En ligne <http://physics.wm.edu/inovikova/psrsqueezing.html>, consulté le 16 mai 2015.
- [14] McGraw-Hill Concise Encyclopedia of Physics. © 2002 by The McGraw-Hill Companies, Inc. *Squeezed quantum states*. En ligne <http://encyclopedia2.thefreedictionary.com/Squeezed+quantum+states>, consulté le 16 mai 2015.
- [15] Raúl Garcia-Patron Sanchez, PhD thesis : "Quantum Information with Optical Continuous Variables : From Bell Tests to Key distribution.", Supervisor : Nicolas Cerf, ULB, 2008.
- [16] A. Einstein, B. Podolsky et N. Rosen, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
- [17] J. S. Bell, Physics **1**, 3 195 (1964).
- [18] N. Brunner, D. Cavalcanti, S. Pironio, V. Scarani, S. Wehner, Rev. Mod. Phys. **86** 419 (2014).
- [19] Banaszek, Konrad and al., "Nonlocality of the Einstein-Podolsky-Rosen state in the phase space", Acta. Phys. Slov. **49**, 491 (1999).
- [20] Robert Lynch, "The quantum phase problem : a critical review", Physics Report 256 (1995) 367-436.
- [21] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc., **A114**, 243 (1927)
- [22] W. H. Louisell, Phys. Lett. **7**, 1 60 (1963)
- [23] Lerner, E.C. (1968) Nuovo Cimento B56, 183; Nuovo Cimento B 57, 251 (errata).
- [24] P. Carruthers and M. M. Nieto, Rev. of Mod. Phys. **40**, 2 411 (1968).
- [25] S. M. Barnett and D. T. Pegg, J. Phys. A: Math. Gen. **19** 3849 (1986).
- [26] J. H. Shapiro and S. R. Shepard, Phys. Rev. A **43**, 3795 (1991).
- [27] J. W. Noh, A. Fougères and L. Mandel, Phys. Rev. Lett. **71**, 16 2579 (1993).

- [28] V. Buzek, A. D. Wilson-Gordon, P. L. Knight, and W. K. Lai, *Phys. Rev. A* **45**, 8079 (1992).
- [29] H. E. Ross, S. D. Crickmar, N. V. Sills, and E. P. Owen, "Orientation to the vertical in free divers", *Aerospace Medicine*, **40**, 728–732 (1969).
- [30] Wolfgang Wiltschko and Roswitha Wiltschko, "Magnetic orientation in birds", *The Journal of Experimental Biology* **199**, 29–38 (1996).
- [31] M. Freyberger and W. Schleich, "Phase uncertainties of a squeezed state", *Phys. Rev. A* **49** 6, 5056 (1994).
- [32] Kanti V. Mardia and Peter E. Jupp, "Directional Statistics", Wiley series in probability and statistics, 2000, ISBN 0 471 95333 4.
- [33] A. Peres and W. K. Wootters, "Optimal detection of quantum information", *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1119 (1991).
- [34] S. Massar and S. Popescu, "Optimal Extraction of Information from Finite Quantum Ensembles", *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1259 (1995).
- [35] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1955).
- [36] N. Gisin and S. Popescu, "Spin Flips and Quantum Information for Antiparallel Spins", *Phys. Rev. Lett.* **83**, 432 (1999).
- [37] N. J. Cerf and S. Iblisdir, "Phase conjugation of continuous quantum variables", *Physical Review A* **64**, 032307 (2001).
- [38] J. Niset, A. Acín, U.L. Andersen, N.J. Cerf, R. García-Patrón, M. Navascués and M. Sabuncu, "Superiority of Entangled Measurements over All Local Strategies for the Estimation of Product Coherent States", *Phys. Rev. Let.* **98** 260404 (2007).